

Ταλάντωση σώματος σε ελατήριο με υπολογίσιμη μάζα

Τερλεμές Σπύρος

14-12-2020

spyrosssterlemes@gmail.com

Έστω ένα ελατήριο με μάζα m η οποία δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Η συσπείρωση-επιμήκυνση, του ελατηρίου ακολουθεί τον νόμο του Hooke αλλά παρόλα η μάζα του ελατηρίου, επηρεάζει τον τρόπο κίνησης του ελατηρίου και κατά συνέπεια και ενός σώματος δεμένου στο ελατήριο. Στην ανάρτηση μελετώ την κίνηση ενός σώματος δεμένο στα άκρα του ελατηρίου.

Η σταθερά του ελατηρίου εξαρτάται από το μήκος του τμήματος του ελατηρίου που μελετάμε. Η εξάρτηση είναι αντιστρόφως ανάλογη, που σημαίνει ότι αν ελατήριο έχει σταθερά k και το κόψουμε στην μέση, η νέα σταθερά θα είναι $2k$. Οπότε αν γενικότερα θεωρήσουμε ένα τμήμα Δx του ελατηρίου, τότε η σταθερά του είναι $kl/\Delta x$ όπου l είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Δηλαδή αν μελετήσουμε ένα τμήμα Δx τότε αυτό το τμήμα θα δέχεται δυνάμεις τάσεις στα άκρα του που θα συνεισφέρουν ώστε να δώσουν τον νόμο του Hooke. Με άλλα λόγια η δύναμη που θα δέχεται το τμήμα Δx θα είναι:

$$f = F(x + \Delta x, t) - F(x, t)$$

(1)

Όπου τα x μετριοούνται από το φυσικό μήκος, και εκφράζουν την συσπείρωση-επιμήκυνση του ελατηρίου. Όταν υπάρξει μια εξωτερική παρέμβαση στο ελατήριο το σημείο που αρχικά ήταν στο x θα μετατοπιστεί στο $\varphi(x)$ και αντίστοιχα το σημείο που ήταν στο $x + \Delta x$ θα μετατοπιστεί στο $\varphi(x + \Delta x)$. Άρα από τον νόμο του Hooke οι δυνάμεις στα δύο άκρα θα είναι αντίστοιχα:

$$F(x + \Delta x, t) = \frac{kl}{\Delta x} \varphi(x + \Delta x, t)$$

$$F(x, t) = \frac{kl}{\Delta l} \varphi(x, t)$$

(2)

Έτσι η σχέση (2) θα γραφτεί τώρα:

$$f = \frac{kl}{\Delta x} [\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)]$$

(3)

Η σχέση εκφράστηκε για ένα τμήμα Δx , έτσι αν πάρουμε το όριο της με το Δx να πηγαίνει στο μηδέν, θα μετατραπεί στην εξής μορφή:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f = kl \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)}{\Delta x} = kl \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$$

(4)

Τώρα το τμήμα Δx που τώρα εξετάζουμε εφόσον $\Delta x \rightarrow 0$ υπακούει στον νόμο του Νεύτωνα, και μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση βάσει της f στα αντίστοιχα $x + \Delta x$ και x , άρα:

$$f(x + \Delta x, t) - f(x, t) = \Delta m \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

(5)

Όπου Δm η μάζα του τμήματος, και η οποία είναι αν θεωρήσουμε λ την γραμμική πυκνότητα θα είναι ίση με $\Delta m = \lambda(x + \Delta x - x) = \lambda \Delta x$. Άρα η σχέση (5) γίνεται:

$$\frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} = \lambda \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

(6)

Παίρνοντας το όριο όταν το Δx πηγαίνει στο μηδέν, έχουμε:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

(7)

Σύμφωνα με την σχέση (4) η μερική διαφορική (7) μπορεί να μετασχηματιστεί στην μερική διαφορική δεύτερης τάξης:

$$kl \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{kl}{\lambda}} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

(8)

Θέτουμε $c^2 = kl/\lambda$ άρα η (8) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

(9)

Υποθέτουμε η συνάρτηση φ μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\varphi(x, t) = Y(x)T(t)$$

(10)

Αντικαθιστώντας η σχέση (9) μετασχηματίζεται στην:

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} T(t) = \frac{1}{c^2} \ddot{T}(t) Y(x) \Rightarrow \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$$

(11)

Κάθε ένα μέλος λοιπόν πρέπει να είναι ίσο με μια σταθερά a , η οποία να είναι αρνητική γιατί αν είναι θετική τότε έχουμε η T είναι αύξουσα που απαγορεύεται. Άρα γράφουμε την σταθερά ως $-a^2$ και έχουμε τώρα:

$$\frac{Y''(x)}{Y(x)} = -a^2$$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -c^2 a^2$$

(12)

Η πρώτη γράφεται στην μορφή:

$$Y''(x) + a^2 Y(x) = 0$$

(13)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\mu^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm ia$$

(14)

Άρα η γενική της λύση είναι:

$$Y(x) = A \sin(ax) + B \cos(ax)$$

(15)

Αντίστοιχα, έχουμε:

$$T(t) = \Gamma \sin(act) + \Delta \cos(act)$$

(16)

Έτσι από τις (15) και (16) η συνάρτηση φ που είναι το γινόμενο των δύο, γράφεται με έναν νέο ανασχηματισμό των σταθερών τώρα:

$$\varphi(x, t) = \sin(ax) [A \sin(act) + B \cos(act)] + \cos(ax) [\Gamma \sin(act) + \Delta \cos(act)]$$

(17)

Έχουμε όμως την οριακή συνθήκη $\varphi(0, t) = 0$ αφού το ένα άκρο είναι ακλόνητο. Άρα η (17) αναγράφεται:

$$\varphi(x, t) = \sin(ax) [A \sin(act) + B \cos(act)]$$

(18)

Το σώμα που είναι τώρα δεμένο στο ελατήριο υπακούει στον 2^ο νόμο. Έστω ότι έχει μάζα M και είναι $x=1$ τότε:

$$-k \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = M \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}$$

(19)

Αντικαθιστώντας την φ που εκφράσαμε στην σχέση (18) στην μερική διαφορική (19) έχουμε:

$$-k \cos(al) = -M(ac)^2 \sin(al) \Rightarrow \frac{M(ac)^2}{k} \tan(al) = 1$$

(20)

Παρατηρούμε ότι από την σχέση (18) το γινόμενο ac εκφράζει την γωνιακή συχνότητα ω . Όμως η σταθερά c^2 είναι ίση kl/λ , Άρα η σχέση (20) γράφεται:

$$\omega \tan\left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right) = \frac{1}{M} \sqrt{km}$$

(21)

Αναπτύσσουμε την εφαπτόμενη σε ανάπτυγμα Taylor και έχουμε:

$$\tan\left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right) = \omega \sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{1}{3} \left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^3 + \frac{2}{15} \left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^5 + \dots$$

(22)

Το να κρατήσουμε τον τρίτο όρο θα ήταν άσκοπο γιατί αν θεωρήσουμε ότι η μάζα m είναι σχετικά μικρή τότε μια προσέγγιση με τους πρώτους δύο αρκεί, άρα γράφουμε:

$$\tan\left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right) = \omega \sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{1}{3} \left(\omega \sqrt{\frac{m}{k}}\right)^3$$

(23)

Έτσι η σχέση (22) μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\omega^2 = \frac{3k^2}{M(3k + m\omega^2)}$$

(24)

Το ω όμως του παρανομαστή μπορεί να αντικατασταθεί από την γνωστή γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{k/M}$ άρα η (24) παίρνει τώρα την μορφή:

$$\omega^2 = \frac{3k}{M\left(3 + \frac{m}{M}\right)}$$

(25)'

Οπότε τελικά η νέα συχνότητα όταν το ελατήριο έχει μάζα είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{3M + m}}$$

(26)

Εφόσον έχουμε βρει το ω μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και την περίοδο ταλάντωσης του σώματος:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3M + m}{3k}}$$

(27)

Παρατηρούμε επίσης ότι όταν $m \rightarrow 0$ οι σχέσεις (26) και (27) είναι οι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

(28)

Που είναι οι αναμενόμενες για ένα ελατήριο το οποίο θεωρείται αβαρές. Άρα ουσιαστικά επιβεβαιώνεται και το τελικό αποτέλεσμα.