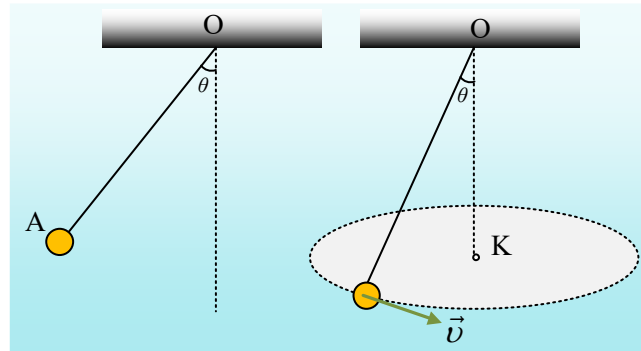


Δύο διαφορετικές κυκλικές κινήσεις

Στο άκρο ενός νήματος μήκους 2m, έχουμε δέσει ένα μικρό σώμα μάζας $m=0,4\text{kg}$. Εκτρέπουμε το σώμα, φέρνοντάς το στη θέση Α, ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία θ με την κατακόρυφο, όπου $\eta\mu\theta=0,6$ και $\sigma\upsilon\eta\theta=0,8$, όπως στο πρώτο σχήμα. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί.



- i) Να επιλέξετε ένα κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων και να αναλύσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, αμέσως μόλις αφεθεί να κινηθεί. Στη συνέχεια:
 - α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος.
 - β) Να βρείτε την αρχική επιτάχυνση του σώματος.
 - γ) Τι κίνηση θα πραγματοποιήσει το σώμα;

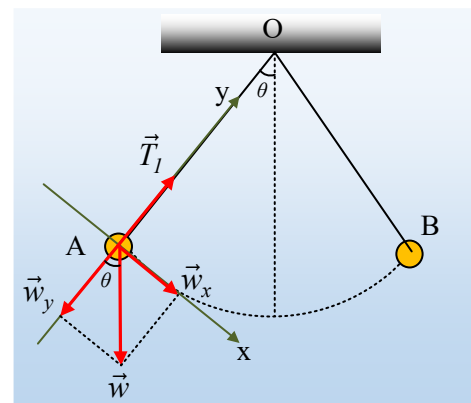
γ_1) απλά καμπυλόγραμμη, γ_2) ομαλή κυκλική, γ_3) κυκλική μη ομαλή.

- ii) Επαναλαμβάνουμε την εκτροπή του σώματος, αλλά τώρα, αφού το φέρουμε στην αρχική θέση Α, όπως και προηγούμενα, του προσδίδουμε μια κατάλληλη οριζόντια ταχύτητα v , οπότε το σώμα διαγράφει οριζόντιο κύκλο, κέντρου Κ, ενώ το νήμα σχηματίζει ξανά γωνία θ , με την κατακόρυφο. Αφού επιλέξετε ξανά ένα κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων, πάνω στο οποίο θα αναλύσετε τις ασκούμενες δυνάμεις, στη συνέχεια:

- α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος.
- β) Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος.
- γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

Απάντηση:

- i) Το σώμα, μόλις αφεθεί να κινηθεί, πρόκειται να κινηθεί κατά μήκος της διακεκομμένης γραμμής, προς τη θέση Β. Οπότε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αξόνων x,y είναι αυτό του διπλανού σχήματος, όπου ο άξονας x είναι εφαπτόμενος στην τροχιά και ο άξονας y ταυτίζεται με την ακτίνα ΑΟ. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ασκούμενες δυνάμεις, όπου το βάρος \vec{w} έχει αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, πάνω στους άξονες.



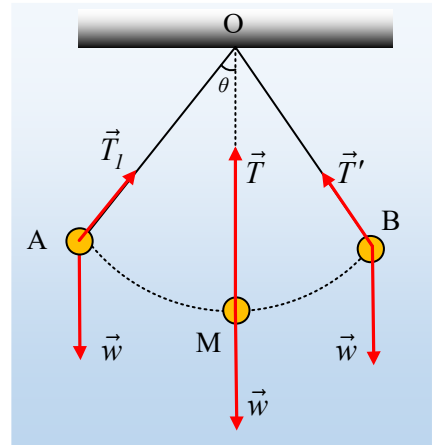
- α) Το σώμα στην διεύθυνση της ακτίνας ισορροπεί, οπότε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow T_1=w_y=mg \cdot \sigma\upsilon\eta\theta \rightarrow T_1=0,4 \cdot 10 \cdot 0,8\text{N} = 3,2\text{N}$$

- β) Στην διεύθυνση του άξονα y , το σώμα θα επιταχυνθεί, οπότε από τον 2° νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:

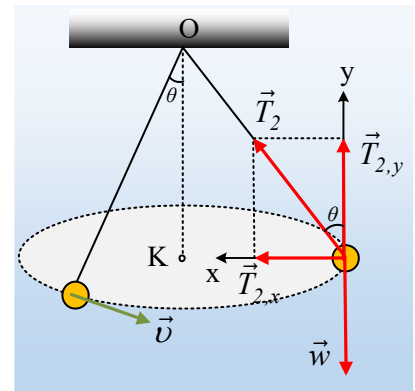
$$\Sigma F_x = ma_1 \rightarrow a_1 = \frac{w_x}{m} = \frac{mg \cdot \eta\mu\theta}{m} = g \cdot \eta\mu\theta = 10 \cdot 0,6 \text{ m/s}^2 = 6 \text{ m/s}^2.$$

γ) Προφανώς η τροχιά που θα ακολουθήσει το σώμα, θα είναι γενικά καμπυλόγραμμη. Όμως σε κάθε θέση το σώμα απέχει κατά ℓ από το O, συνεπώς κινείται σε κυκλική τροχιά, μέχρι να φτάσει στο σημείο B, συμμετρικό του A ως προς την κατακόρυφο που περνά από το O. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η επιτάχυνση που προηγούμενα υπολογίσαμε, δεν είναι σταθερή ($a=g \cdot \eta\mu\theta$), αφού μειώνεται η γωνία εκτροπής. Έτσι στη θέση M θα έχουμε την μέγιστη ταχύτητα, ενώ στη συνέχεια θα επιβραδυνθεί, μέχρι να φτάσει στο B. Σωστό το γ₃).



Ας σημειωθεί ότι εκτός από την παραπάνω επιτάχυνση στη διεύθυνση της εφαπτόμενης, η οποία μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας, έχουμε και κεντρομόλο επιτάχυνση στην διεύθυνση της ακτίνας, όπου απλά στην αρχική θέση A ήταν μηδενική, λόγω μηδενικής ταχύτητας, πράγμα που μας επέτρεψε να μιλήσουμε για «ισορροπία» στη διεύθυνση της ακτίνας.

ii) Αφού τώρα το σώμα διαγράφει οριζόντια κυκλική τροχιά κέντρου K, επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων x,y, όπου ο x είναι οριζόντιος, στην διεύθυνση της ακτίνας και ο y είναι κατακόρυφος, όπως στο σχήμα, για να μπορούμε να εμφανίσουμε την κεντρομόλο δύναμη. (έγινε επιλογή της θέσης του σώματος, όπως στο σχήμα, για να έχουμε δυνάμεις στο επίπεδο της σελίδας...). Στην περίπτωση αυτή η δύναμη που αναλύεται πάνω στους άξονες είναι η τάση του νήματος T_2 .



α) Από την ισορροπία του σώματος στην κατακόρυφη διεύθυνση παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_{2y} = w \rightarrow T_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = mg \rightarrow$$

$$T_2 = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{0,4 \cdot 10}{0,8} \text{ N} = 5 \text{ N}$$

β) Το σώμα αποκτά επιτάχυνση στην διεύθυνση της ακτίνας, οπότε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = ma_2 \rightarrow a_2 = \frac{T_{2,x}}{m} = \frac{T_2 \cdot \eta\mu\theta}{m} = \frac{5 \cdot 0,6}{0,4} \text{ m/s}^2 = 7,5 \text{ m/s}^2.$$

γ) Η παραπάνω επιτάχυνση, είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας, οπότε:

$$\alpha_2 = \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\alpha_2 R} = \sqrt{a_2 \cdot \ell \eta\mu\theta} \rightarrow$$

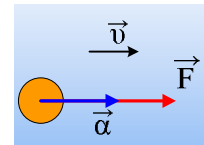
$$v = \sqrt{7,5 \cdot 2 \cdot 0,6} \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

$$\text{Αφού } \eta\mu\theta = \frac{R}{\ell} \rightarrow R = \ell\eta\mu\theta$$

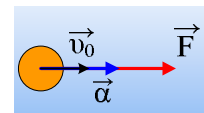
Λίγη περισσότερη θεωρία, σαν σχόλια:

1) Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα γράφεται $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, πράγμα που μας λέει ότι το σώμα αποκτά **πάντα** επιτάχυνση στην διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. Το ποια κίνηση θα πραγματοποιήσει το σώμα, εξαρτάται όχι μόνο από την επιτάχυνση, αλλά και από την (αρχική) ταχύτητα του σώματος. Ας το δούμε λίγο αναλυτικότερα:

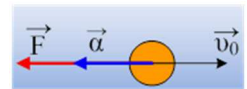
α) Αν σε ένα ελεύθερο ακίνητο σώμα ασκηθεί μια δύναμη, το σώμα θα αρχίσει να επιταχύνεται (και να κινείται) στη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. Από εκεί και πέρα το τι κίνηση θα κάνει, εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της δύναμης. Έτσι στην περίπτωση που η δύναμη είναι **σταθερή** (μέτρο και κατεύθυνση) το σώμα θα εκτελέσει **ευθύγραμμη** ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.



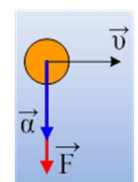
β) Σε ένα ελεύθερο σώμα που κινείται έχοντας κάποια στιγμή μια ταχύτητα v_0 , ασκείται μια δύναμη της ίδιας κατεύθυνσης. Τότε η κατάσταση είναι όπως στο διπλανό σχήμα και η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα θα αυξήσει το **μέτρο** της ταχύτητας. Αν τώρα η δύναμη είναι **σταθερή** (μέτρο και κατεύθυνση) το σώμα θα εκτελέσει **ευθύγραμμη** ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με αρχική ταχύτητα.



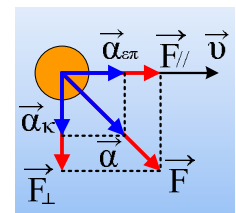
γ) Σε ένα σώμα που κινείται έχοντας κάποια στιγμή μια ταχύτητα v_0 , ασκείται μια δύναμη αντίθετης κατεύθυνσης. Στο σχήμα βλέπουμε την κατάσταση, όπου η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα θα μειώσει το **μέτρο** της ταχύτητας. Αν τώρα η δύναμη είναι **σταθερή** (μέτρο και κατεύθυνση) το σώμα θα εκτελέσει **ευθύγραμμη** ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.



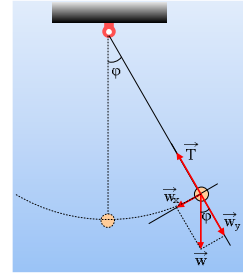
δ) Αν η (συνισταμένη) δύναμη που θα ασκηθεί κάποια στιγμή σε ένα σώμα που κινείται με ταχύτητα v , είναι κάθετη στην ταχύτητα, τότε η επιτάχυνση είναι κεντρομόλος και θα μεταβάλλει μόνο την κατεύθυνση της ταχύτητας και όχι το μέτρο της. Αν δε αυτό, συνεχιστεί για κάποιο χρονικό διάστημα (να είναι διαρκώς η δύναμη κάθετη στην ταχύτητα, διατηρώντας και σταθερό μέτρο), η κίνηση του σώματος θα είναι ομαλή κυκλική.



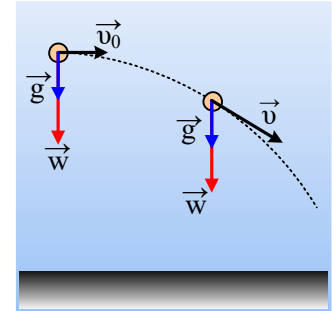
ε) Αν σε ένα ελεύθερο σώμα, που μια στιγμή κινείται με κάποια ταχύτητα, ασκηθεί μια δύναμη η οποία σχηματίζει γωνία θ με την ταχύτητα, όπου $\theta \neq 90^\circ$, τότε μπορούμε να αναλύσουμε τη δύναμη σε δυο συνιστώσες. Μια στη διεύθυνση της ταχύτητας $F_{//}$ η οποία θα προκαλέσει επιτάχυνση, ονομάζεται και επιτρόχια, η οποία θα μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας και μια σε κάθετη προς την ταχύτητα διεύθυνση F_{\perp} η οποία θα μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας. Προφανώς η κίνηση θα είναι καμπυλόγραμμη. Ποιας μορφής θα είναι η καμπυλόγραμμη αυτή κίνηση, προφανώς εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της δύναμης.



- 2) Στην πρώτη κίνηση του εκκρεμούς το σώμα θα κινηθεί σε κυκλική τροχιά και η κίνηση θα είναι επιταχυνόμενη κυκλική. Η συνιστώσα του βάρους στη διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου, θα προκαλέσει την αύξηση του μέτρου της ταχύτητας, ενώ η συνισταμένη στη διεύθυνση της ακτίνας ($T - mg \cdot \sin\varphi$) θα είναι η κεντρομόλος, η οποία και θα προκαλέσει κεντρομόλο επιτάχυνση που θα μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας.



- 3) Αν εκτοξεύσουμε ένα σώμα οριζόντια, στην αρχική θέση το βάρος είναι κάθετο στην αρχική ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι θα προκαλέσει μόνο αλλαγή στην κατεύθυνση της ταχύτητας. Όμως προσοχή!! Η ασκούμενη δύναμη (το βάρος) είναι μια σταθερή δύναμη, οπότε μετά από λίγο δεν θα είναι πλέον κάθετη στην ταχύτητα, οπότε θα μεταβάλλει και το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας.



Προφανώς η κίνηση είναι η γνωστή μας οριζόντια βολή και η τροχιά είναι παραβολική.

dmargaris@gmail.com