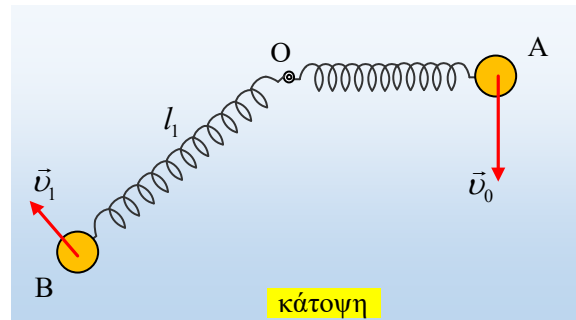


Το μήκος του ελατηρίου και η ακτίνα καμπυλότητας

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σφαίρα μάζας $m=4\text{kg}$, δεμένη στο άκρο ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=100\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί σε σταθερό σημείο O . Σε μια στιγμή η σφαίρα δέχεται στιγμιαίο κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα $v_0=5\text{m/s}$, κάθετη στον άξονα του ελατηρίου. Μετά από λίγο η σφαίρα φτάνει στη θέση B , όπως στο σχήμα (σε κάτοψη), έχοντας ταχύτητα μέτρου $v_1=4\text{m/s}$, επίσης κάθετη στον άξονα του ελατηρίου.



Να υπολογιστούν για την θέση B :

- το μήκος του ελατηρίου l_1 ,
- η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς της σφαίρας.

Απάντηση:

Στην αρχική θέση A η σφαίρα ισορροπεί, οπότε δεν δέχεται οριζόντια δύναμη από το ελατήριο, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του l_0 . Αλλά κατά την κίνηση της σφαίρας στη συνέχεια, στο οριζόντιο επίπεδο, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η δύναμη του ελατηρίου (βάρους και N είναι κατακόρυφες, άρα κάθετες στη μετατόπιση). Αν λοιπόν στη θέση B το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl , από την διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα σφαίρα-ελατήριο, παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \rightarrow$$

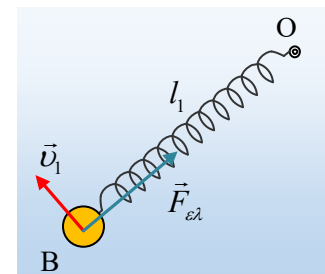
$$\Delta l = \sqrt{\frac{m(v_0^2 - v_1^2)}{k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot (5^2 - 4^2)}{100}}m = 0,6m$$

Εξάλλου στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης, η δύναμη του ελατηρίου κατευθύνεται προς το σημείο O , οπότε η στροφορμή της σφαίρας ως προς το O , παραμένει σταθερή. Έτσι από Α.Δ.Σ. παίρνουμε:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B \rightarrow$$

$$mv_0l_0 = mv_1(l_0 + \Delta l) \rightarrow$$

$$l_0 = \frac{v_1 \cdot \Delta l}{v_0 - v_1} = \frac{4 \cdot 0,6}{5 - 4}m = 2,4m$$



- Με βάση τα παραπάνω το μήκος του ελατηρίου στη θέση B είναι:

$$l_1 = l_0 + \Delta l = 2,4m + 0,6m = 3m$$

β) Στη θέση B, η δύναμη του ελατηρίου είναι κάθετη στην ταχύτητα v_1 , παίζοντας τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, αλλάζοντας δηλαδή την κατεύθυνση της ταχύτητας της σφαίρας:

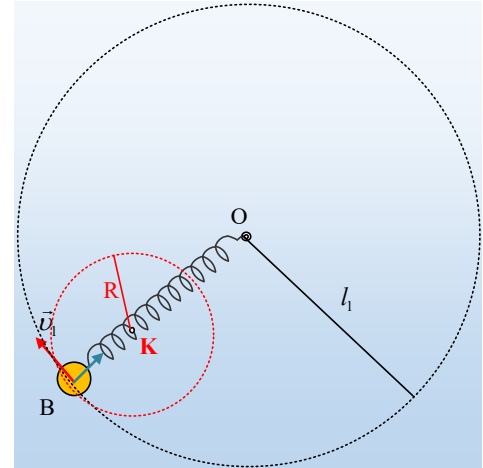
$$\sum F = m \frac{v_1^2}{R} \rightarrow k \cdot \Delta l = m \frac{v_1^2}{R} \rightarrow$$

$$R = \frac{m v_1^2}{k \cdot \Delta l} = \frac{4 \cdot 4^2}{100 \cdot 0,6} m = \frac{16}{15} m$$

Σχόλιο:

Αξίζει να επισημανθεί ένα λάθος που γίνεται συνήθως σε προβλήματα με τροχιά σώματος δεμένου στο άκρο ελατηρίου.

Είναι άλλο το μήκος του ελατηρίου και άλλο η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στη θέση B. Αν δούμε το διπλανό σχήμα, το μήκος του ελατηρίου είναι $l_1=3m$, αλλά η τροχιά της σφαίρας στη θέση B, δεν προσεγγίζεται από κύκλο κέντρου O και ακτίνας $3m$, αλλά από κύκλο κέντρου K με ακτίνα $16/15m \approx 1,1m$.



dmargaris@gmail.com