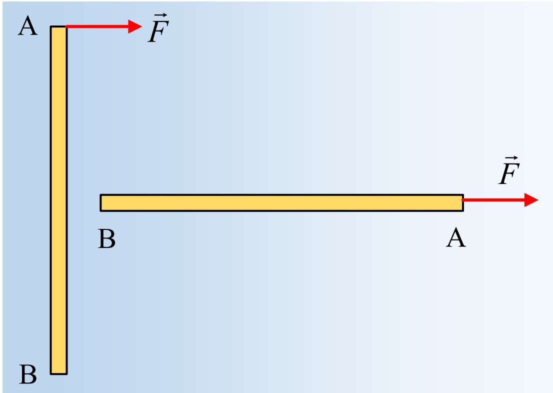
Μια ράβδος και η κινητική της ενέργεια.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής ράβδος ΑΒ μάζας m=6kg και μήκους ℓ=4m. Σε μια στιγμή t=0 ασκείται πάνω της μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου F=3N, με αποτέλεσμα τη στιγμή t_1=2,14s η ράβδος να έχει περιστραφεί κατά 90°, όπως φαίνεται στο σχήμα (σε κάτοψη). Για τη στιγμή t_1 ζητούνται:



i) Η κινητική ενέργεια της ράβδου.

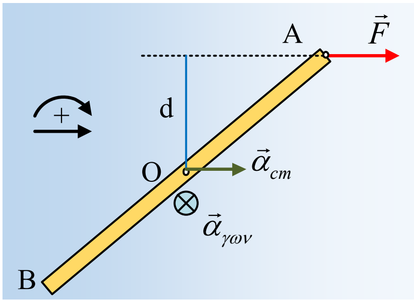
ii) Η ταχύτητα του άκρου Α της ράβδου.

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της $I=m\ell^2/12$.

Απάντηση:

i) Θεωρώντας την κίνηση της ράβδου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας της Ο, παίρνουμε (θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική και την ωρολογιακή φορά περιστροφής της ράβδου, επίσης θετική):



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F=m\alpha_{cm} \rightarrow F=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm}=0,5m/s^2$.

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot d = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$.

Παρατηρούμε ότι το κέντρο μάζας Ο αποκτά μια σταθερή επιτάχυνση, άρα θα εκτελέσει μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ενώ η γωνιακή επιτάχυνση αντίθετα, δεν είναι σταθερή και η στροφική κίνηση δεν είναι ομαλά επιταχυνόμενη (η γωνιακή επιτάχυνση μειώνεται μέχρι τη στιγμή t_1, ενώ στη συνέχεια αλλάζοντας φορά θα επιβραδύνει την περιστροφική κίνηση). Με βάση αυτά, για το διάστημα 0-t_1, από την μεταφορική κίνηση παίρνουμε:

$$\upsilon_{cm,1} = a_{cm}\cdot t_1 = 0,5\cdot 2,14 m/s = 1,07 \text{ m/s}$$

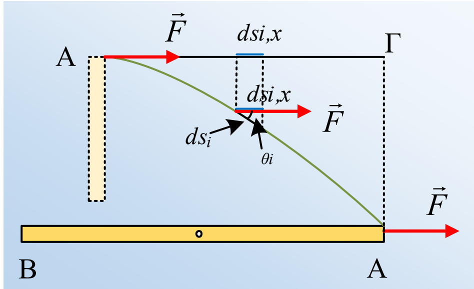
$$x_{cm,1} = \frac{1}{2}a_{cm}t_1^2 = \frac{1}{2}0,5\cdot 2,14^2 m = 1,145m$$

Αν όμως το μέσον της ράβδου μετατοπίσθηκε στην διεύθυνση της δύναμης κατά $x_{cm,1}$, το άκρο Α μετατοπίσθηκε κατά $\Delta x_A = x_{cm,1} + \frac{1}{2}\ell = 3,145m$, ενώ το έργο της δύναμης θα υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W_F = F\cdot\Delta x_A$$

Πράγματι, αν χωρίσουμε την καμπύλη τροχιά του σημείου εφαρμογής της δύναμης (πράσινη γραμμή) σε στοιχειώδη τμήματα ds_i τα αντίστοιχα στοιχειώδη έργα θα είναι:

$$dW_i = F \cdot ds_i \cdot \sigma\upsilon\nu\theta_i = F \cdot ds_{i,x}.$$



Αλλά τότε το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης τροχιάς του άκρου Α, θα είναι:

$$W_F = \sum dW_i = \sum F \cdot ds_{i,x} = F \sum ds_{i,x} = F \cdot (A\Gamma) = F \cdot \Delta x_A$$

Το έργο όμως της δύναμης F, μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται στη ράβδο και εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας, δηλαδή έχουμε:

$$K_1 = W_F = F \cdot \Delta x_A = 3 \cdot 3{,}145 J = 9{,}435 J$$

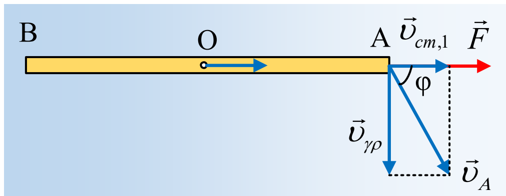
ii) Η παραπάνω κινητική ενέργεια μπορεί να αποδοθεί εν μέρει στην μεταφορική και εν μέρει στην περιστροφική κίνηση της ράβδου, γράφοντας:

$$K_1 = K_\mu + K_\sigma \rightarrow K_1 = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm,1}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega_1^2 \rightarrow$$

$$K_\sigma = \frac{1}{2} I_{cm}\omega_1^2 = K_1 - \frac{1}{2} m\upsilon_{cm,1}^2 = 9{,}435 J - \frac{1}{2} 6 \cdot 1{,}07^2 J = 6 J \rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K_\sigma}{I_{cm}}} = \sqrt{\frac{24K_\sigma}{m\ell^2}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 6}{6 \cdot 4^2}} rad/s = \sqrt{1{,}5}\ \mathrm{rad}/s$$

Έτσι τη στιγμή t_1 το άκρο Α της ράβδου έχει τις ταχύτητες που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα (η $\upsilon_{cm,1}$ λόγω της μεταφορικής κίνησης της ράβδου και η $\upsilon_{\gamma\rho}$ λόγω της περιστροφικής κίνησης), με αποτέλεσμα η συνολική του ταχύτητα να έχει μέτρο:



$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{cm,1}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2} = \sqrt{\upsilon_{cm,1}^2 + \left(\omega_1 \frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{1{,}07^2 + 1{,}5 \cdot 2^2} m/s = 2{,}67 m/s$$

Ενώ σχηματίζει με την δύναμη γωνία φ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{\upsilon_{cm,1}} = \frac{2\sqrt{1{,}5}}{1{,}07} \approx 2{,}3$$

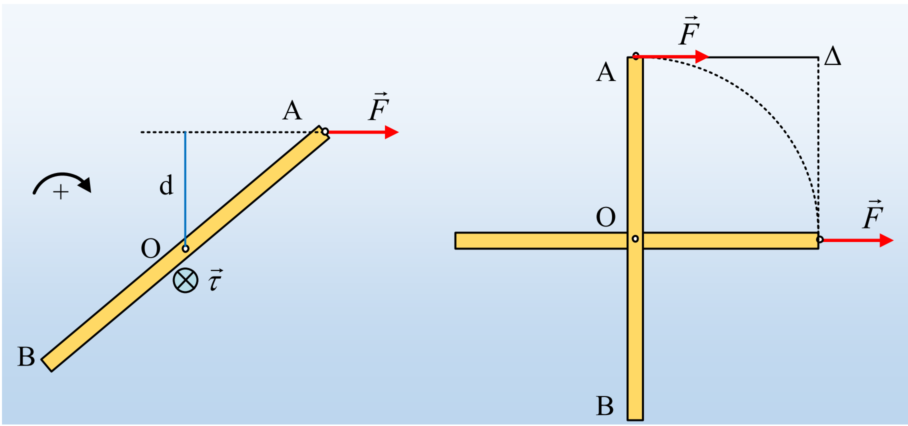
iii) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου, είναι ίσος με τον ρυθμό που μεταφέρεται ενέργεια σε αυτήν, μέσω του έργου της δύναμης, άρα ίσος με την ισχύ της δύναμης F:

$$\frac{dK}{dt} = P_F = F \cdot \upsilon_{cm,1} = 3 \cdot 1{,}07 J/s = 3{,}21 J/s$$

Αξίζει να τονισθεί ότι τη στιγμή t_1 η γωνιακή επιτάχυνση είναι μηδενική, άρα δεν μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα, συνεπώς και η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης. Αν δούμε τη γραμμική ταχύτητα, θα δούμε να είναι κάθετη στην δύναμη, συνεπώς η αντίστοιχη ισχύς είναι μηδενική! Έτσι δεν μένει παρά η ισχύς η οποία συνδέεται με την μεταφορική κινητική ενέργεια…

Σχόλιο:

Ας πάρουμε την ίδια ράβδο η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό ακλόνητο κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας O. Η ράβδος θα αποκτήσει κάποια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής εξαιτίας της ασκούμενης ροπής $\tau = F \cdot d = F \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$, ροπής μεταβλητού μέτρου.



Δουλεύοντας όμως παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο αυτής της ροπής, από το έργο δύναμης σε καμπύλη τροχιά, οπότε:

$$W_F = \sum dW_i = \sum F \cdot ds_{i,x} = F \cdot (A\Delta) = 3 \cdot 2J = 6J = K_{\sigma\tau\rho}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η κινητική ενέργεια της ράβδου λόγω περιστροφής (για γωνία 90°, όπως παραπάνω), ίσης με το έργο της μεταβλητής ροπής, δεν εξαρτάται από τίποτα άλλο, παρά από το μέτρο της αρχικής ροπής της δύναμης!!!

Είναι φανερό ότι και στην αρχική σύνθετη κίνηση, χωρίς σταθερό άξονα, η ράβδος αποκτά την ίδια περιστροφική κινητική ενέργεια…

dmargaris@gmail.com