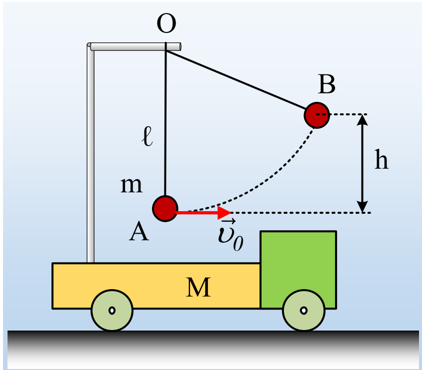
Κυκλική κίνηση και ορμή

Σε ένα αμαξίδιο έχει προσαρμοσθεί κατάλληλο στήριγμα, από σημείο Ο του οποίου κρέμεται, μέσω νήματος μήκους l=1m, μια σφαίρα μάζας m=1kg. Σε μια στιγμή η σφαίρα δέχεται στιγμιαίο κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα $υ_0$. Συγκρατώντας ακίνητο το αμαξίδιο, η σφαίρα ανέρχεται μέχρι τη θέση Β, σε ύψος h=0,8m, πριν κινηθεί ξανά προς τα κάτω.



i) Να υπολογισθεί η αρχική ορμή της σφαίρας (αμέσως μετά το κτύπημα), καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής της.

ii) Να βρεθεί η τάση του νήματος, καθώς και η στιγμιαία επιτάχυνση της σφαίρας, στη θέση Β.

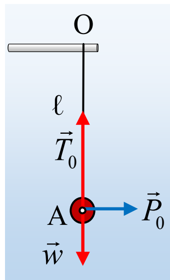
iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, η σφαίρα αποκτά την ίδια αρχική ταχύτητα $υ_0$, μετά το κτύπημα, αλλά τώρα αφήνουμε το αμαξίδιο ελεύθερο να κινηθεί, στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το αμαξίδιο, μέχρι να σταματήσει η άνοδος της σφαίρας, έχει μέτρο $υ_κ$=1m/s, ενώ το νήμα παραμένει διαρκώς τεντωμένο, να βρεθούν:

α) Η συνολική μάζα Μ αμαξιδίου- στηρίγματος.

β) Το μέγιστο ύψος h΄ στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα.

Απάντηση:

i) Λαμβάνοντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Α, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της σφαίρας από το Α στο Β, οπότε έχουμε:



$$K_A+U_A=K_B+U_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mυ_0^2+0=0+mgh \rightarrow$$

$$υ_0=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}8}m/s=4m/s$$

Αλλά τότε αμέσως μετά την κρούση η ορμή της σφαίρας έχει μέτρο:

$$P_0=mυ_0=1\cdot 4\ kgm/s=\ 4kg\cdot m/s$$

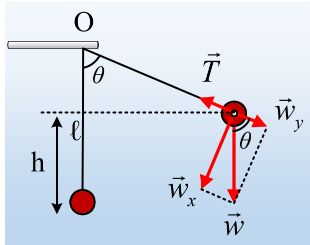
Με κατεύθυνση προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.

Ενώ για το ρυθμό μεταβολής της ορμής της σφαίρας ισχύει:

$$\frac{dP}{dt}=\sum F=(T_0-w)=m\frac{υ_0^2}{R}=1\frac{4^2}{1}kg\cdot m/s^2=16kg\cdot m/s^2$$

Με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα πάνω.

ii) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στη θέση Β, οπότε παίρνουμε το παρακάτω σχήμα. Από την ισορροπία στην διεύθυνση της ακτίνας παίρνουμε:



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = mg\frac{\ell - h}{\ell} = 1\cdot 10\frac{1-0,8}{1}N = 2N$$

Ενώ για την στιγμιαία επιτάχυνση της σφαίρας, η οποία έχει την κατεύθυνση της συνιστώσας w_x (κάθετη στο νήμα), έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha \rightarrow$$

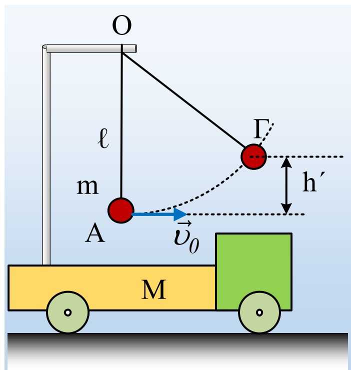
$$\alpha = \frac{mg\cdot\eta\mu\theta}{m} = g\cdot\eta\mu\theta = g\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 10\cdot\sqrt{1-0,8^2}m/s^2 = 6m/s^2.$$

iii) Καθώς η σφαίρα κινείται προς τα πάνω, δέχεται από το νήμα δύναμη, την τάση του νήματος Τ. Μια ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης δύναμη Τ΄, το νήμα ασκεί στο στήριγμα, στο σημείο Ο. Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης αυτής επιταχύνει το αμαξίδιο, το οποίο θα κινηθεί προς τα δεξιά.

α) Έστω ότι η σφαίρα σταματά την προς τα άνω κίνησή της, φτάνοντας σε ύψος h΄. Στην θέση αυτή έχει την ίδια ταχύτητα με το αμαξίδιο, αφού το νήμα παραμένει τεντωμένο και με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής, παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m\upsilon_0 = (M+m)\upsilon_\kappa \rightarrow$$

$$M = \frac{m(\upsilon_0 - \upsilon_\kappa)}{\upsilon_\kappa} = \frac{1(4-1)}{1}kg = 3kg$$



β) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ, παίρνουμε (ξανά U_A=0) παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_\kappa^2 + mgh' \rightarrow$$

$$h' = \frac{\upsilon_0^2}{2g} - \frac{(M+m)\upsilon_\kappa^2}{2mg} = \frac{4^2}{2\cdot 10}m - \frac{4\cdot 1^2}{2\cdot 1\cdot 10}m = 0,6m$$

dmargaris@gmail.com