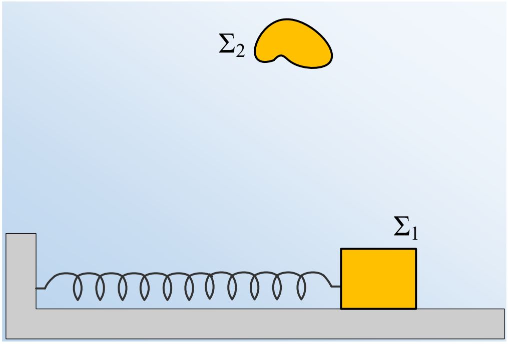
Η ταλάντωση πριν και μετά την πλαστική κρούση

Ένα σώμα $Σ_1$, μάζας m εκτελεί ΑΑΤ, σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, με πλάτος ταλάντωσης A_0. Κάποια στιγμή αφήνεται από ορισμένο ύψος ένα δεύτερο σώμα $Σ_2$, μάζας Μ να πέσει, οπότε συγκρούεται πλαστικά με το σώμα $Σ_1$ και το συσσωμάτωμα ξεκινά μια νέα ΑΑΤ, με πλάτος ταλάντωσης A_1.



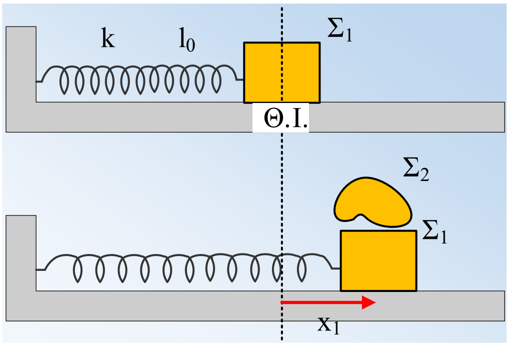
i) Να γίνει η γραφική παράσταση $A_1^2=f(υ_1^2)$, όπου $υ_1$ η ταχύτητα του $Σ_1$, ελάχιστα πριν την κρούση.

ii) Αν Μ=3m, να υπολογιστεί το ελάχιστο πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

iii) Αν το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την παραπάνω πλαστική κρούση, που οδηγεί σε ελάχιστο πλάτος, είναι ίσο με 87,5%, να υπολογιστεί ο λόγος $U_{2,αρχ}/E_{τ,1}$, όπου $U_{2,αρχ}$ η αρχική δυναμική ενέργεια του $Σ_2$ τη στιγμή που αφήνεται να πέσει και $E_{τ,1}$ η αρχική ενέργεια ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$.

Απάντηση:

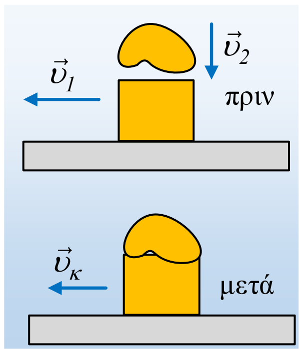
Το σώμα $Σ_1$ εκτελεί ΑΑΤ γύρω από μια θέση ισορροπίας που ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους l_0 του ελατηρίου. Γύρω από την ίδια θέση θα ταλαντωθεί και το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Έστω ότι η κρούση πραγματοποιήθηκε σε μια θέση με απομάκρυνση x_1, όπως στο σχήμα.



i) Για την ταχύτητα $υ_1$ του σώματος $Σ_1$ πριν την κρούση, σε απομάκρυνση x_1, ισχύει (από ενέργεια ταλάντωσης):

$$\frac{1}{2}mυ_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kA_0^2 \quad (1)$$

Από την διατήρηση της ορμής στην οριζόντια διεύθυνση για την κρούση, παίρνουμε:



$$p_{πριν,x}=p_{μετ,x} \quad \rightarrow mυ_1=(M+m)υ_κ \rightarrow υ_κ=\frac{mυ_1}{M+m} \quad (2)$$

Ξανά παίρνοντας την ενέργεια της νέας ταλάντωσης (για το συσσωμάτωμα), βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\kappa^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kA_1^2 \quad (3)$$

Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη, με παράλληλη αντικατάσταση της υ_κ από την (2), έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_\kappa^2-\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kA_0^2-\frac{1}{2}kA_1^2\rightarrow$$

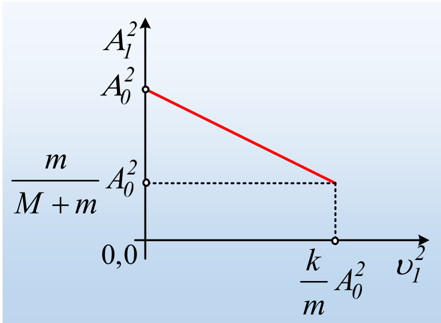
$$m\upsilon_1^2-(M+m)\left(\frac{m\upsilon_1}{M+m}\right)^2=kA_0^2-kA_1^2\rightarrow$$

$$A_1^2=A_0^2-\frac{Mm}{k(M+m)}\upsilon_1^2 \quad (4)$$

Η γραφική παράσταση της τελευταίας εξίσωσης (4) είναι μια ευθεία, όπου το μέτρο της ταχύτητας υ_1 παίρνει τιμές από 0 έως και:

$$\upsilon_{1max}=\omega\cdot A_0=A_0\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Έτσι η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος.



ii) Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, βλέπουμε ότι το ελάχιστο πλάτος ταλάντωσης μετά την κρούση, προκύπτει στην περίπτωση που η κρούση γίνει στη θέση ισορροπίας, x=0. Στην περίπτωση αυτή έχουμε για το ελάχιστο πλάτος:

$$A_1^2=A_0^2-\frac{Mm}{k(M+m)}\upsilon_1^2=A_0^2-\frac{Mm}{k(M+m)}\frac{k}{m}A_0^2\rightarrow$$

$$A_{1,min}^2=\frac{m}{M+m}A_0^2=\frac{m}{3m+m}A_0^2=\frac{1}{4}A_0^2\rightarrow$$

$$A_{1,min}=\frac{1}{2}A_0$$

iii) Ελάχιστα πριν την κρούση, το Σ_1 έχει μόνο κινητική ενέργεια (Θ.Ι.) ίση με $K_1=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2=E_{\tau,1}$, ενώ το Σ_2, θεωρώντας το σημείο κρούσης ως U=0, έχει μόνο κινητική ενέργεια, ίση με την αρχική δυναμική ενέργεια, στην θέση από την οποία αφέθηκε να πέσει, $K_2=Mgh=U_{2,\alpha\rho\chi}$. Αλλά τότε το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος, είναι ίσο:

$$\pi=\frac{K_{\pi\rho\iota\nu}-K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\iota\nu}}100\%=\left(1-\frac{\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_\kappa^2}{E_{\tau,1}+U_{2,\alpha\rho\chi}}\right)100\%\rightarrow$$

$$\left(1-\frac{\frac{1}{2}kA_1^2}{E_{\tau,1}+U_{2,\alpha\rho\chi}}\right)100=87{,}5\rightarrow\left(1-\frac{\frac{1}{2}k\frac{A_0^2}{4}}{E_{\tau,1}+U_{2,\alpha\rho\chi}}\right)100=87{,}5\rightarrow$$

$$1-\frac{\frac{1}{4}E_{\tau,1}}{E_{\tau,1}+U_{2,\alpha\rho\chi}}=0,875\rightarrow\frac{E_{\tau,1}}{E_{\tau,1}+U_{2,\alpha\rho\chi}}=0,5\rightarrow$$

$$\frac{U_{2,\alpha\rho\chi}}{E_{\tau,1}}=1$$

Ο παραπάνω λόγος μας λέει ότι το σώμα Σ_2 βρισκόταν σε τέτοιο ύψος h, ώστε να έχει δυναμική ενέργεια ίση με την αρχική ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ_1.

dmargaris@gmail.com