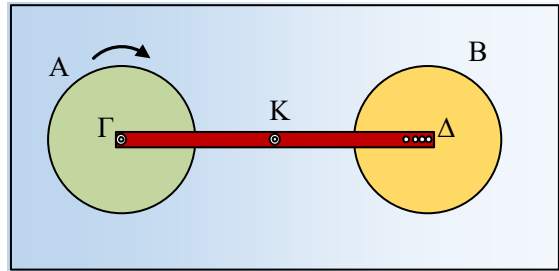


Η περιφορά και η περιστροφή ενός δίσκου

Στο σχήμα βλέπετε μια αβαρή ράβδο ΓΔ μήκους $l=2m$, στα άκρα της οποίας έχουν συνδεθεί δύο ομογενείς δίσκοι Α και Β με ακτίνες $r=0,5m$. Ο δίσκος Α μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άρθρωση στο άκρο Γ της ράβδου, ενώ αντίθετα ο δίσκος Β έχει καρφωθεί, με το κέντρο του να ταυτίζεται με το δεξιό άκρο Δ, χωρίς δυνατότητα περιστροφής, παρά μόνο μαζί με την ράβδο. Ο Α έχει μάζα $M=12,25kg$ και στρέφεται ωρολογιακά με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=4rad/s$, ο Β έχει μάζα $m=8kg$, ενώ η ράβδος συγκρατείται σε οριζόντια θέση. Σε μια στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί, οπότε η ράβδος ΓΔ στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Κ.

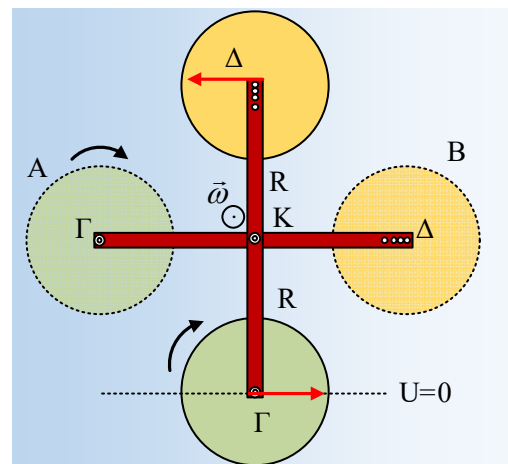


- i) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του δίσκου Β τη χρονική στιγμή $t_1=1,3s$, όπου η ράβδος γίνεται κατακόρυφη, για πρώτη φορά.
- ii) Πόσες περιστροφές έχει εκτελέσει κάθε δίσκος, μέχρι τη στιγμή t_1 ;
- iii) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις αν αρχικά ο δίσκος Α ηρεμούσε;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Ο δίσκος Α δέχεται δύο δυνάμεις. Το βάρος και μια δύναμη από τον άξονα. Και οι δύο περνούν από το κέντρο μάζας του Γ, οπότε η συνολική ροπή, ως προς το κέντρο μάζας του, είναι μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι δεν πρόκειται να αποκτήσει κάποια γωνιακή επιτάχυνση και θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Το σύστημα πρόκειται να περιστραφεί αριστερόστροφα και έστω ω η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου (άρα και του δίσκου Β τη στιγμή t_1). Εξάλλου η ράβδος και ο δίσκος Β αποτελούν ένα ενιαίο στερεό, η ροπή αδράνειας του οποίου ως προς τον άξονα περιστροφής στο Κ, είναι ίση:



$$I_{s,K} = I_{\rho} + I_{\delta} = I_{\delta,K} = \frac{1}{2} m r^2 + m R^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0,5^2 + 8 \cdot 1^2 \right) kgm^2 = 9kgm^2$$

Όπου $R = \frac{1}{2} l$ η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που θα διαγράψουν τα κέντρα των δύο δίσκων.

- i) Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα, μεταξύ της αρχικής θέσης και τη στιγμή t_1 , όπου η ράβδος γίνεται κατακόρυφη, όπως στο σχήμα, θεωρώντας ως $U=0$ το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την κατώτερη θέση του άκρου Γ της ράβδου.

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_{1,\Gamma} \omega_0^2 + 0 + MgR + mgR = \left(\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{1,\Gamma} \omega^2 \right) + \frac{1}{2} I_{s,K} \omega^2 + mg \cdot 2R \quad (1)$$

Αλλά αν ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού s, το άκρο της ράβδου Γ και κέντρο μάζας του A δίσκου, εκτελεί κυκλική κίνηση με ταχύτητα μέτρου $v_{cm} = \omega R$, οπότε:

$$MgR + mgR = \frac{1}{2} M (\omega R)^2 + \frac{1}{2} I_{s,K} \omega^2 + mg \cdot 2R$$

Και με αντικατάσταση βρίσκουμε $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Οπότε για την κινητική ενέργεια του B δίσκου έχουμε:

$$K_B = \frac{1}{2} I_B \omega^2 = \frac{1}{2} I_{s,K} \omega^2 = \frac{1}{2} 9 \cdot 2^2 J = 18J$$

ii) Ο A δίσκος έχει περιστραφεί κατά γωνία $\Delta\phi_A = \omega_0 \cdot t_1 = 4 \cdot 1,3 \text{ rad} = 5,2 \text{ rad}$, οπότε έχει κάνει:

$$N_A = \frac{\Delta\phi_A}{2\pi} = \frac{5,2}{2\pi} \text{ περ} = 0,83 \text{ περιστροφές}$$

Ο δεύτερος δίσκος έχει περιστραφεί, όσο και έχει περιστραφεί και το στερεό s_K, δηλαδή κατά $\Delta\phi_2 = \pi/2 \text{ rad}$, έχοντας εκτελέσει:

$$N_B = \frac{\Delta\phi_B}{2\pi} = \frac{\pi/2}{2\pi} \text{ περ} = 0,25 \text{ περιστροφές}$$

iii) Αν αρχικά ο A δίσκος ηρεμεί, τότε δεν πρόκειται να αποκτήσει κάποια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, αφού δεν πρόκειται να δεχτεί κάποια ροπή και η εξίσωση (1) θα γραφτεί:

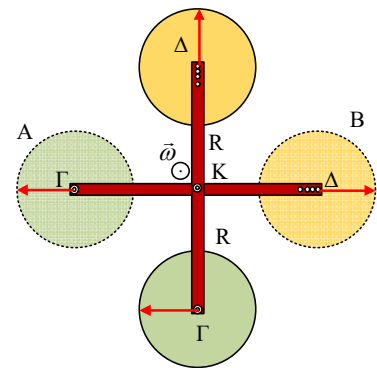
$$0 + 0 + MgR + mgR = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{s,K} \omega^2 + mg \cdot 2R$$

Η οποία οδηγεί ξανά σε $\omega = 2 \text{ rad/s}$ και στην ίδια κινητική ενέργεια του B δίσκου $K_B = 18J$.

Όσον αφορά τις περιστροφές, θα έχουμε τον A δίσκο να **μην περιστρέφεται**, οπότε $N_A = 0$, ενώ ο B δίσκος θα εκτελέσει μέχρι τη στιγμή t_1 ξανά 0,25 περιστροφές, όπως και προηγουμένως.

Σχόλιο:

Θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι το άκρο Γ της ράβδου έχει εκτελέσει 0,25 περιστροφές, αλλά τότε και ο A δίσκος έχει εκτελέσει τον ίδιο αριθμό. Και όμως ο δίσκος A, **δεν έχει περιστραφεί**. Το κέντρο του Γ, εκτέλεσε κυκλική κίνηση έχοντας διαγράψει γωνία $\pi/2$, έχουμε δηλαδή περιφορά του κέντρου Γ, αλλά όχι περιστροφή του δίσκου. Αν κάποιος θέλει να «δει» την διαφορά, ας εστιάσει το τι κάνουν οι κόκκινες ακτίνες των δύο δίσκων.



dmargaris@gmail.com