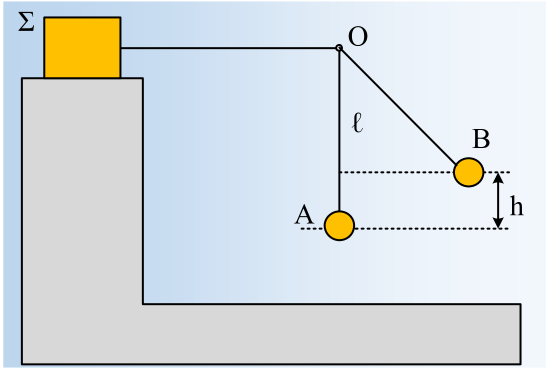
Η κυκλική κίνηση και η τριβή.

Μια σφαίρα μάζας m=1kg ηρεμεί στη θέση Α, στο κάτω άκρο μη ελαστικού νήματος, το οποίο αφού περάσει από μια ακίδα Ο, το άλλο του άκρο έχει προσδεθεί σε σώμα Σ μάζας Μ=4kg, το οποίο βρίσκεται ακίνητο, πάνω σε στήριγμα, σε ορισμένο ύψος, όπως στο σχήμα. Το κατακόρυφο τμήμα του νήματος έχει μήκος l=1m, ενώ το υπόλοιπο τμήμα του είναι οριζόντιο. Για τους συντελεστές τριβής μεταξύ του σώματος Σ και του επιπέδου στήριξής του, δίνεται $\mu=\mu_s=0{,}5$.



i) Να υπολογιστεί η δύναμη τριβής που ασκείται στο σώμα Σ.

ii) Εκτρέπουμε τη σφαίρα, ανεβάζοντάς την κατακόρυφα κατά h=0,4m, φέρνοντάς την στη θέση Β, με το νήμα τεντωμένο και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί.

α) Να υπολογισθεί η τριβή στο σώμα Σ, αμέσως μόλις αφεθεί ελεύθερη η σφαίρα στη θέση Β.

β) Να εξετάσετε αν, στη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας, κάποια στιγμή το σώμα Σ ολισθήσει.

iii) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος Η που θα μπορούσαμε να εκτρέψουμε τη σφαίρα, χωρίς να έχουμε ολίσθηση του σώματος Σ, κατά την κίνησή της;

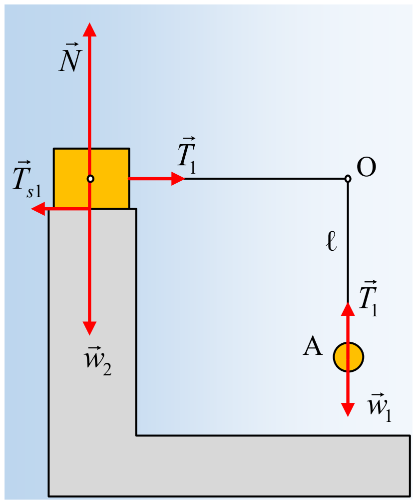
Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα και στο σώμα Σ, λαμβάνοντας ως δεδομένο (και γνωστό…) ότι το νήμα ασκεί στα άκρα του δυνάμεις ίσου μέτρου T_1. Από την ισορροπία του σώματος Σ στην κατακόρυφη διεύθυνση, παίρνουμε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=Mg, \text{ οπότε:}$$

$$T_{o\rho}=T_{o\lambda}=\mu\cdot N=\mu Mg=0{,}5\cdot 4\cdot 10N=20N$$



i) Από την ισορροπία της σφαίρας:

$$\Sigma F=0 \rightarrow T_1=mg=1\cdot 10N=10N$$

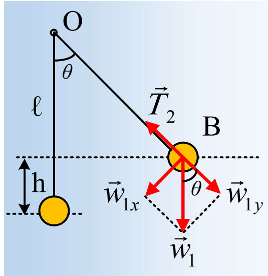
Και από την ισορροπία του σώματος Σ, στην διεύθυνση x:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow T_{s1}=T_1=10N$$

Προφανώς η τριβή αυτή είναι στατική ($T_{s1}<T_{o\rho}$) και το σώμα Σ ισορροπεί, εξασφαλίζοντας και την ισορροπία της σφαίρας.

ii) Μόλις αφήσουμε τη σφαίρα στη θέση Β, θα κινηθεί διαγράφοντας κυκλική τροχιά κέντρου Ο και ακτίνας ℓ.

α) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στη θέση, αμέσως μόλις αφεθεί να κινηθεί. Στην διεύθυνση της ακτίνας ΟΒ, θα ισχύει:



$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon^2}{R} \to T_2 - mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \to$$

$$T_2 = mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta + m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (1)$$

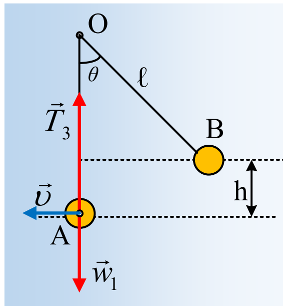
$$T_2 = mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta + m\frac{0^2}{R} = mg\cdot\frac{\ell - h}{\ell} = 10\cdot\frac{1-0,4}{1}N = 6N$$

Αφού υ=0 και η γωνία θ μεταξύ w_1 και w_{1y} είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφη, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Όμως το νήμα ασκεί δυνάμεις ίσου μέτρου στα δυο του άκρα, οπότε ασκεί και στο σώμα Σ οριζόντια δύναμη μέτρου T_2'=6Ν. Έτσι από την ισορροπία του σώματος Σ, βρίσκουμε ότι ασκείται και στατική τριβή, με φορά προς τα αριστερά (όπως και στο i) ερώτημα μέτρου T_{s2}=6Ν.

β) Καθώς κατέρχεται η σφαίρα, αφενός μειώνεται η γωνία θ και μεγαλώνει το συνθ, αφετέρου αυξάνει το μέτρο της ταχύτητας, οπότε από την σχέση (1) προκύπτει ότι αυξάνεται η τάση του νήματος. Αλλά τότε μέγιστη τιμή της τάσης θα έχουμε τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο. Εξετάζουμε αν η τάση αυτή είναι ικανή να μετακινήσει το σώμα Σ. Αν δεν είναι, τότε το σώμα Σ δεν πρόκειται να κινηθεί.

Έστω ότι η σφαίρα φτάνει στη θέση Α με οριζόντια ταχύτητα υ. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon^2}{R} \to T_3 - mg = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (2)$$

Ενώ εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της σφαίρας από το Β στο Α, θεωρώντας U_A=0, παίρνουμε:

$$K_B + U_B = K_A + U_A \to$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \to m\upsilon^2 = 2mgh \quad (3)$$

Με αντικατάσταση της (3) στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$T_3 = mg + m\frac{\upsilon^2}{R} = mg + \frac{2mgh}{R} = mg + \frac{2mg\cdot 0,4}{1} = 1,8mg = 18N$$

Την ίδια στιγμή το νήμα ασκεί στο σώμα Σ και την μέγιστη οριζόντια δύναμη, μέτρου 18Ν, οπότε θα αναπτυχθεί και δύναμη στατικής τριβής 18Ν, οπότε και πάλι το Σ θα συνεχίσει να ισορροπεί.

iii) Με βάση τα παραπάνω, το μέγιστο ύψος Η θα είναι αυτό, όπου, όταν η σφαίρα φτάσει στη θέση Α, η τάση του νήματος να έχει μέτρο T_4=20Ν, με αποτέλεσμα το νήμα να ασκήσει και στο σώμα Σ δύναμη 20Ν. Έτσι η στατική τριβή θα μετατραπεί σε οριακή και η ισορροπία του Σ εξασφαλίζεται (οριακά!!!).

Στην περίπτωση αυτή η εφαρμογή της ΑΔΜΕ θα μας δώσει ξανά την σχέση (3) με μορφή:

$$m\upsilon_{\max}^2 = 2mgH \quad (3a)$$

Ενώ η (2) θα μας δώσει:

$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \rightarrow T_4 - mg = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \rightarrow$$

$$T_4 - mg = \frac{2mgH}{\ell} \rightarrow$$

$$20N - 10N = \frac{2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot H}{1} \rightarrow H = 0,5m$$

dmargaris@gmail.com