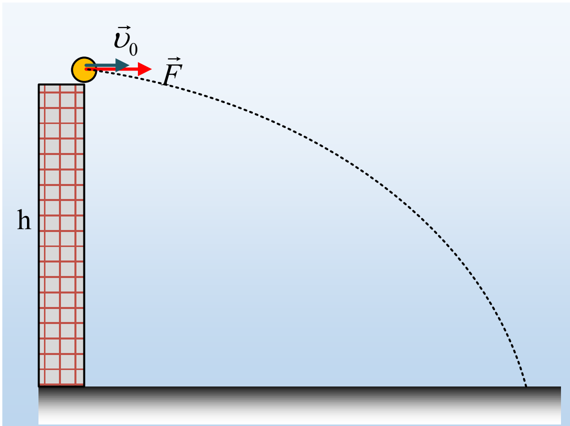
Η αρχή της επαλληλίας σε δύο εκτοξεύσεις.

Μια μπάλα, μάζας m=0,5kg, εκτοξεύεται από την ταράτσα της σπιτιού, σε ύψος h=45m, οριζόντια με αρχική ταχύτητα υ_0=12m/s.



i) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος, σε πόση οριζόντια απόσταση θα συμβεί αυτό και ποια η τελική κινητική ενέργεια της μπάλας.

ii) Επαναλαμβάνουμε την εκτόξευση, αλλά τώρα με την βοήθεια κατάλληλου μηχανισμού, ασκείται στην μπάλα μια σταθερή οριζόντια δύναμη F, μέτρου F=3N, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα.

α) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει τώρα η μπάλα στο έδαφος και σε πόση οριζόντια απόσταση θα συμβεί αυτό;

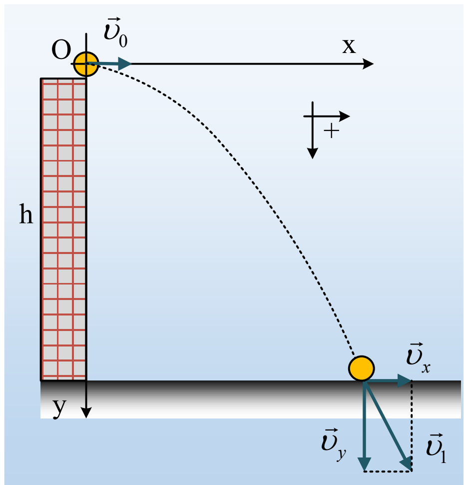
β) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της μπάλας, ελάχιστα πριν την πρόσκρουση στο έδαφος και να συγκριθεί με την αρχική μηχανική ενέργεια της στιγμή της εκτόξευσης. Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

iii) Αν στην δεύτερη εκτόξευση η δύναμη F έπαυε να ασκείται 2s μετά την εκτόξευση, σε ποιο σημείο του εδάφους θα έπεφτε η μπάλα;

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:

i) Για την μπάλα που εκτοξεύεται οριζόντια, θεωρώντας σύνθετη την κίνησή της, με βάση την αρχή της επαλληλίας, ισχύουν για τις επιμέρους κινήσεις της άξονες x και y, που έχουν σημειωθεί στο διπλανό σχήμα:



Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_x=\upsilon_o$ (1)	$\upsilon_y=gt$ (3)
$x=\upsilon_o\cdot t$ (2)	$y=\frac{1}{2}gt^2$ (4)

Αντικαθιστώντας στην (4) y=h βρίσκουμε:

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 45}{10}}s=3s$$

Οπότε με αντικατάσταση στην (2), βρίσκουμε ότι θα φτάσει στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση:

$$x=x_1=\upsilon_o\cdot t_1=12\cdot 3m=36m$$

Όσον αφορά την τελική της κινητική ενέργεια, θα είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_x^2 + g^2 t_1^2\right) \rightarrow$$

$$K_1 = \frac{1}{2}0,5 \cdot \left(12^2 + 10^2 \cdot 3^2\right)J = 261J$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την παραπάνω κινητική ενέργεια, εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης:

$$K_{\alpha\rho} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}0,5 \cdot 12^2 J + 0,5 \cdot 10 \cdot 45J = 261J$$

ii) Από τη στιγμή που στην μπάλα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη, θα αποκτήσει και σταθερή οριζόντια επιτάχυνση μέτρου:

$$F = ma_x \rightarrow a_x = \frac{F}{m} = \frac{3}{0,5}m/s^2 = 6m/s^2.$$

Αλλά τότε και στην οριζόντια διεύθυνση η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και οι αντίστοιχες εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_x=\upsilon_o+\alpha_x t$ (1α)	$\upsilon_y=gt$ (3)
$x= \upsilon_o \cdot t+ \frac{1}{2} \alpha_x t^2$ (2α)	$y= \frac{1}{2} gt^2$ (4)

α) Αλλά τότε η εξίσωση (4) είναι ίδια με προηγουμένως, πράγμα που σημαίνει ότι η κίνηση της μπάλας στην κατακόρυφη διεύθυνση δεν άλλαξε, οπότε για τον χρόνο πτώσης θα έχουμε ξανά $t=t_2=3s$.

Ενώ με αντικατάσταση στην (2$^\alpha$) θα πάρουμε για την οριζόντια απόσταση που θα διανύσει η μπάλα μέχρι να πέσει στο έδαφος:

$$x = x_2 = \upsilon_0 t_2 + \frac{1}{2}a_x t_2^2 = 12 \cdot 3m + \frac{1}{2}6 \cdot 3^2 m = 63m$$

β) Τη στιγμή που η μπάλα φτάνει στο έδαφος έχει συνιστώσες ταχύτητας:

$$\upsilon_{x2}=\upsilon_0+\alpha_x \cdot t_2=(12+6 \cdot 3)\ m/s=30m/s \quad \text{και} \quad \upsilon_{y2}=gt_2=10 \cdot 3m/s=30m/s$$

Οπότε η κινητική της ενέργεια είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_{x2}^2 + \upsilon_{y2}^2\right) = \frac{1}{2}0,5 \cdot \left(30^2 + 30^2\right)J = 450J$$

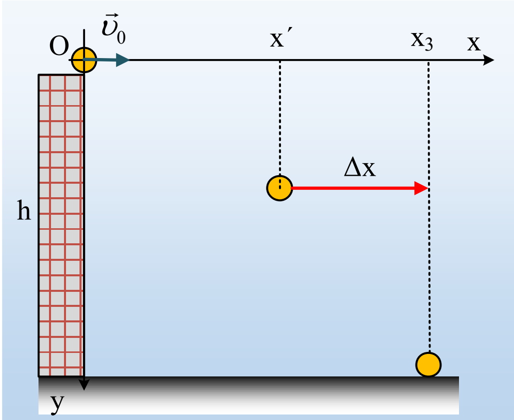
Προφανώς κινητική αυτή ενέργεια είναι μεγαλύτερη από την K_1 (450>261). Η αύξηση αυτή οφείλεται στο έργο της ασκούμενης δύναμης F. Πράγματι:

$$W_F=F \cdot x_2=3 \cdot 63J=189J^*$$

Πράγματι:

$$K_1+W_F=261J+189J=450J=K_2.$$

iii) Με βάση τα προηγούμενα η άσκηση της δύναμης F δεν επηρεάζει την κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, οπότε και πάλι η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο t_3=3s. Αλλά μέχρι τη στιγμή t΄=2s θα ισχύουν οι προηγούμενες εξισώσεις, όπου με αντικατάσταση βρίσκουμε:



$\upsilon'_x=\upsilon_o+\alpha_x t'=12m/s+6\cdot 2m/s=24m/s$ και

$$x'=\upsilon_0 t'+\frac{1}{2}a_x t'^2=12\cdot 2m+\frac{1}{2}6\cdot 2^2 m=36m$$

Στη συνέχεια και για το τελευταίο sec της κίνησης, η μπάλα στην οριζόντια διεύθυνση κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, με αποτέλεσμα να μετατοπισθεί κατά:

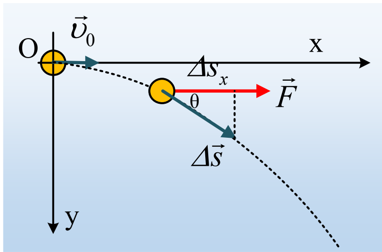
$$\Delta x=\upsilon'_x\cdot\Delta t=24\cdot 1m=24m$$

Φτάνοντας στη θέση:

$$x_3=x'+\Delta x=36m+24m=60m.$$

Σχόλιο* :

Έστω μια στοιχειώδης μετατόπιση της μπάλας κατά Δs, με την επίδραση της σταθερής οριζόντιας δύναμης F. Στη διάρκειά της η δύναμη παράγει στοιχειώδες έργο:



$$\Delta W_i=F\cdot\Delta s\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=F\cdot\Delta s_{xi}$$

Όπου F και Δs τα μέτρα δύναμης και μετατόπισης της μπάλας.

Βλέπουμε δηλαδή το αντίστοιχο έργο να είναι ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης, επί το μέτρο της προβολής της στοιχειώδους μετατόπισης $\Delta\vec{s}$ στη διεύθυνση της δύναμης.

Αλλά τότε για να υπολογίσουμε το ολικό έργο της δύναμης δεν έχουμε παρά, να χωρίσουμε την τροχιά σε στοιχειώδη τόξα Δs και να προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχειώδη έργα. Τότε θα παίρναμε:

$$W_F=W_1+W_2+\dots W_\nu=F\cdot\Delta S_{x1}+F\cdot\Delta S_{x2}+\dots F\cdot\Delta S_{x\nu}\rightarrow$$
$$W_F=F\cdot\left(\Delta S_{x1}+\Delta S_{x2}+\dots\Delta S_{x\nu}\right)=F\cdot x_2$$

dmargaris@gmail.com