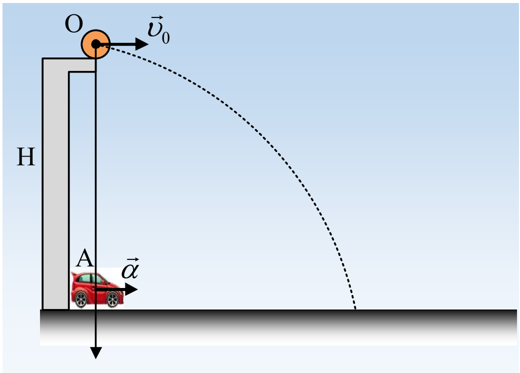
Δύο κινήσεις. Η μια οριζόντια βολή.

Από ένα σημείο Ο, σε ύψος Η=45m, από το έδαφος, εκτοξεύεται μια μικρή μπάλα οριζόντια με αρχική ταχύτητα $υ_0$=9m/s, τη χρονική στιγμή t_0=0. Την ίδια στιγμή από τη θέση Α στο έδαφος, στην ίδια κατακόρυφο με το Ο, ξεκινά να κινείται με σταθερή επιτάχυνση α=6m/s^2 ένα μικρό αυτοκινητάκι, προς την ίδια κατεύθυνση, όπως στο σχήμα.



i) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο κινουμένων σωμάτων, τα οποία θεωρούμε αμελητέων διαστάσεων, τη χρονική στιγμή t_1=2s.

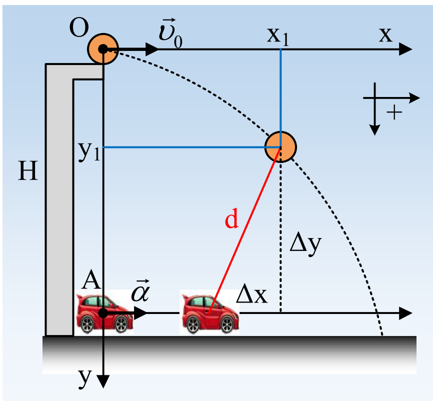
ii) Να αποδειχθεί ότι η μπάλα θα πέσει πάνω στο αυτοκινητάκι.

iii) Να υπολογισθεί η διαφορά των δύο ταχυτήτων $\vec{υ}_μ - \vec{υ}_α$ ελάχιστα πριν η μπάλα κτυπήσει το αυτοκινητάκι.

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:

Ας συμβολίσουμε $υ_1$ την στιγμιαία ταχύτητα της μπάλας και $υ_2$ την αντίστοιχη ταχύτητα του αυτοκινήτου. Θεωρώντας την κίνηση της μπάλας σύνθετη, μια ευθύγραμμη ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφη, παίρνουμε τους άξονες x και y, όπως στο σχήμα, λαμβάνοντας τις εξισώσεις:



Για το αυτοκινητάκι:

$$x_2 = \frac{1}{2}at^2 \quad (1a) \quad \text{και} \quad υ_2 = αt \quad (2a)$$

Για την μπάλα:

Άξονας x	Άξονας y
$υ_{1x}=υ_0$ (1)	$υ_{1y}=g\cdot t$ (3)
$x_1=υ_0\cdot t$ (2)	$y_1 = \frac{1}{2}gt^2$ (4)

i) Με αντικατάσταση στις παραπάνω εξισώσεις, βρίσκουμε τις θέσεις των δύο σωμάτων τη στιγμή t_1=2s:

Αυτοκινητάκι: $x_2 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}6\cdot 2^2 m = 12m$

Μπάλα: $x_1=υ_0\cdot t = 8\cdot 2m=16m$ και $y_1 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}10\cdot 2^2 m = 20m$

Αλλά τότε, με βάση το παραπάνω σχήμα, η απόσταση d των δύο σωμάτων είναι:

$$d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(H-y_1)^2}\rightarrow$$
$$d=\sqrt{(16-12)^2+(45-20)^2}m=\sqrt{641}m\approx 25,3m$$

ii) Θέτοντας στην (4) y=H, βρίσκουμε σε πόσο χρόνο η μπάλα φτάνει στο έδαφος:

$$H=\frac{1}{2}gt_{o\lambda}^2\rightarrow t_{o\lambda}=\sqrt{\frac{2H}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 45}{10}}s=3s$$

Στο χρόνο αυτό η μπάλα οριζόντια έχει μετατοπισθεί κατά:

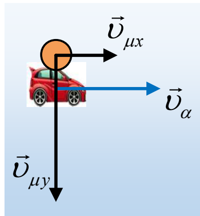
$$x_{1,o\lambda}=\upsilon_0\cdot t_{o\lambda}=9\cdot 3\text{m}=27\text{m}$$

Ενώ το αυτοκινητάκι κατά:

$$x_{2,o\lambda}=\frac{1}{2}at_{o\lambda}^2=\frac{1}{2}6\cdot 3^2m=27m$$

Συνεπώς τα δυο σώματα έχουν διανύσει οριζόντια ίσες αποστάσεις και θα βρεθούν στην ίδια θέση.

iii) Τη στιγμή που η μπάλα πέφτει πάνω στο αυτοκινητάκι, αυτό έχει ταχύτητα



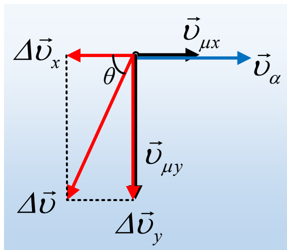
$$\upsilon_\alpha=\upsilon_2=\alpha t_{o\lambda}=6\cdot 3m/s=18m/s$$

Οριζόντια όπως στο σχήμα.

Την ίδια στιγμή, η μπάλα έχει συνιστώσες ταχύτητας:

$$\upsilon_{\mu x}=\upsilon_0=9m/s \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_{\mu y}=gt_{o\lambda}=10\cdot 3m/s=30m/s$$

όπως στο σχήμα.



Οπότε για την διαφορά των δύο ταχυτήτων, έχουμε:

$$\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_\mu-\vec{\upsilon}_\alpha\rightarrow\begin{cases}\Delta\upsilon_x=\upsilon_{\mu x}-\upsilon_{\alpha x}=9m/s-18m/s=-9m/s\\ \Delta\upsilon_y=\upsilon_{\mu y}-\upsilon_{\alpha y}=30m/s-0m/s=30m/s\end{cases}$$

Αλλά τότε με βάση το τελευταίο σχήμα, για το **μέτρο** της διαφοράς των ταχυτήτων έχουμε:

$$|\Delta\upsilon|=\sqrt{(\Delta\upsilon_x)^2+(\Delta\upsilon_y)^2}=\sqrt{9^2+30^2}m/s\approx\sim 31,3m/s$$

Ενώ η **κατεύθυνσή** της σχηματίζει με την κατεύθυνση της $\Delta\upsilon_x$ γωνία θ, όπως στο σχήμα, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{|\Delta\upsilon_y|}{|\Delta\upsilon_x|}=\frac{9}{30}=0,3$$

Σχόλιο:

Η παραπάνω διαφορά των δύο ταχυτήτων ονομάζεται και **σχετική** ταχύτητα της μπάλας ως προς το αυτοκινητάκι. Είναι δηλαδή η ταχύτητα της μπάλας, όπως θα την μετρούσε ο οδηγός του αυτοκινήτου (αν υπήρχε ένας τέτοιος μικροσκοπικός οδηγός!!!).

dmargaris@gmail.com