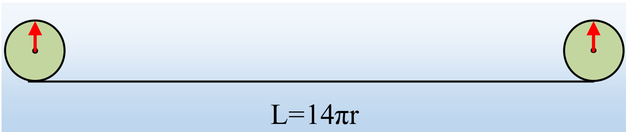
Από την ευθύγραμμη τροχιά στην τεθλασμένη

Και από εκεί ξανά στο τεταρτοκύκλιο!!!

1) Στο σχήμα ένας δίσκος ακτίνας r κυλίεται σε ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο, διανύοντας απόσταση L=14πr.



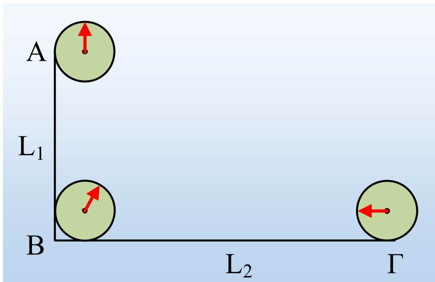
Πόσες περιστροφές κάνει;

Απάντηση:

Η απάντηση είναι προφανής:

$$N_1 = \frac{L}{2\pi r} = \frac{14\pi r}{2\pi r} = 7$$

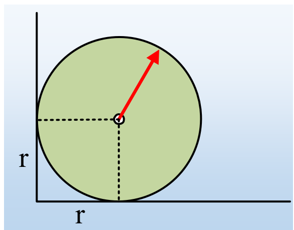
2) Ο παραπάνω δρόμος «σπάει» σε δύο άλλους ευθύγραμμους που σχηματίζουν ορθή γωνία, με μήκη $L_1+L_2=L=14\pi r$, όπου το τμήμα ΑΒ είναι κατακόρυφο και το ΒΓ οριζόντιο. Ένας δίσκος ξεκινά από το άκρο Α και φτάνει στο άκρο Γ, ενώ σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του κυλίεται (προφανώς η μετακίνηση αυτή γίνεται προγραμματισμένα, περιστρέφοντας εμείς το δίσκο και όχι αφήνοντάς τον ελεύθερο να κινηθεί…).



Ο δίσκος θα πραγματοποιήσει 7 περιστροφές ή όχι και γιατί;

Απάντηση:

Μόλις ο δίσκος φτάσει στην κορυφή Β, και έρθει σε επαφή με το οριζόντιο τμήμα ΒΓ, όπως στο σχήμα, στην κατακόρυφη διεύθυνση θα έχει διανύσει απόσταση L_1-r, ενώ στην συνέχεια πρόκειται να κινηθεί οριζόντια σε απόσταση L_2-r. Αλλά τότε από την θέση Α μέχρι την Γ το κέντρο του δίσκου, **δεν διανύει απόσταση L**, αλλά απόσταση:

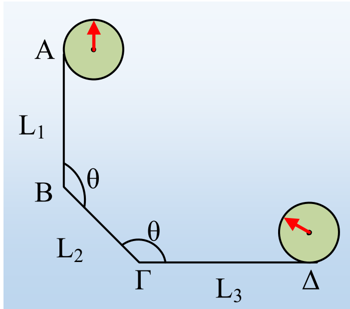


$$s_2 = L_1 - r + L_2 - r = L_1 + L_2 - 2r = 14\pi r - 2r$$

Και ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει θα είναι ίσος:

$$N_2 = \frac{s_2}{2\pi r} = \frac{14\pi r - 2r}{2\pi r} = 7 - \frac{1}{\pi} \approx 6,68$$

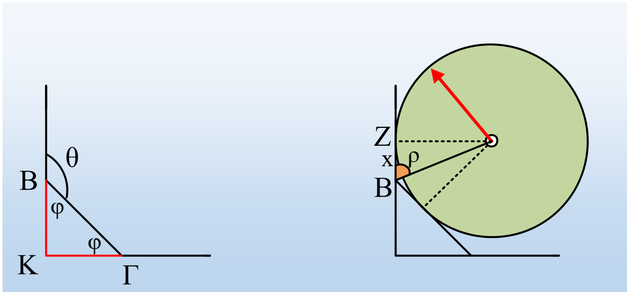
3) Και αν σπάσουμε την παραπάνω διαδρομή σε τρία τμήματα, με μήκη $L_1+L_2+L_3=L=14\pi r$, όπου το τμήμα ΑΒ είναι κατακόρυφο και το ΓΔ οριζόντιο, με ίσες γωνίες στα Β και Γ, όπως στο σχήμα, τότε πόσες περιστροφές πρόκειται να κάνει ο δίσκος κυλιόμενος από το Α στο Δ;



Απάντηση:

Αν προεκτείνουμε την ΑΒ και ΓΔ, τέμνονται κάθετα στο Κ, οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Αλλά τότε η γωνία θ=135°.

Καθώς κυλίεται ο δίσκος φτάνει στη θέση του δεξιού από τα παρακάτω σχήματα, το σημείο επαφής με το τμήμα ΑΒ, σημείο Ζ, απέχει κατά x από το Β, ενώ η γωνία ρ= ½ θ=67,5°.



Αλλά τότε:

$$x=\frac{r}{\varepsilon\varphi\rho}=0,414r$$

Συνεπώς το μήκος της διαδρομής του κέντρου του δίσκου θα είναι:

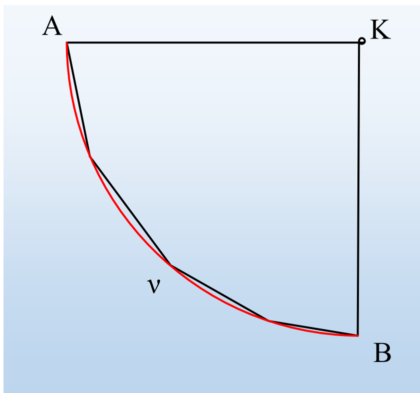
$$s_3=L_1-x+L_2-2x+L_3-x=L_1+L_2+L_3-4x=14\pi r-4x$$

Και ο αριθμός των περιστροφών:

$$\mathrm{N}_3=\frac{s_3}{2\pi r}=\frac{14\pi r-4\cdot 0,414r}{2\pi r}=7-\frac{1}{\pi}\approx 6,74$$

Ας το γενικεύσουμε:

Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το τεταρτοκύκλιο ΑΒ του σχήματος, με ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Έστω το πολύγωνο που σχηματίζεται και με τις δύο ακτίνες (οριζόντια και κατακόρυφη) με πλευρές ν+2. Ένα κανονικό πολύγωνο με ν+2 πλευρές έχει γωνίες κορυφής



$$\varphi_{\nu+2/1}=\nu\frac{180°}{\nu+2}$$

Συνεπώς το άθροισμα των γωνιών του θα είναι ίσο:

$$\varphi_{\nu+2/o\lambda}=\nu\frac{180°}{\nu+2}\cdot(\nu+2)=180\nu$$

Αν από τη συνολική αυτή γωνία αφαιρέσουμε 270° που είναι το άθροισμα των γωνιών στα Α, Β και Κ, θα μας μείνει $φ_ν$=180ω-270°, οπότε κάθε μια από τις (ν-1) ίσες γωνίες που θα σχηματίζονται από την τεθλασμένη γραμμή πάνω στο τεταρτοκύκλιο, θα είναι ίση:

$$\varphi_1 = \frac{180\nu - 270°}{\nu - 1} \rightarrow \varphi_1/2 = \frac{90\nu - 135°}{\nu - 1} \quad (1)$$

Αλλά τότε η συνολική απόσταση που θα διανύσει το κέντρο του κυλιόμενου δίσκου θα είναι ίσο με:

$$s_\nu = \nu L_1 - 2(\nu - 1)\frac{r}{\varepsilon\varphi\left(\varphi_1/2\right)}$$

Και ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου, θα είναι ίσος:

$$\mathrm{N}_\nu = \frac{s_\nu}{2\pi r} = \frac{L}{2\pi r} - (\nu - 1)\frac{1}{\pi \cdot \varepsilon\varphi\left(\varphi_1/2\right)} \quad (2)$$

Για εφαρμογή, έστω ότι η κύλιση κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου προσεγγίζεται με τη βοήθεια ν=20 ίσων μικρών ευθυγράμμων τμημάτων, τα οποία ανά δύο σχηματίζουν γωνία, από (1):

$$\varphi_\nu = \frac{180\nu - 270°}{\nu - 1} = \frac{180 \cdot 20 - 270°}{20 - 1} = 175,23° \rightarrow \varphi_\nu/2 = 87,63°$$

Ενώ ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει ο δίσκος ακτίνας r κατά την κύλισή του κατά μήκος της τεθλασμένης με την οποία προσεγγίζουμε το τεταρτοκύκλιο, θα είναι ίσος:

$$\mathrm{N}_{20} = \frac{L}{2\pi r} - (\nu - 1)\frac{1}{\pi \cdot \varepsilon\varphi\left(\varphi_1/2\right)} = \frac{14\pi r}{2\pi r} - (20 - 1)\frac{1}{\pi \cdot \varepsilon\varphi(87,63)} = 7 - 0,2503 \approx 6,75$$

Νομίζω ότι το αποτέλεσμα δεν αφήνει καμιά αμφιβολία για το ότι τα 20 μικρά τμήματα προσεγγίζουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια το τεταρτοκύκλιο, αλλά και πόσος είναι ο αριθμός των περιστροφών. Είναι 6,75, αφού χάσαμε 0,25 περιστροφές, μιας και ο δίσκος «χάνει» τα τμήματα που συμβολίσαμε παραπάνω με μήκη x, με τα οποία δεν έρχεται σε επαφή…

dmargaris@gmail.com