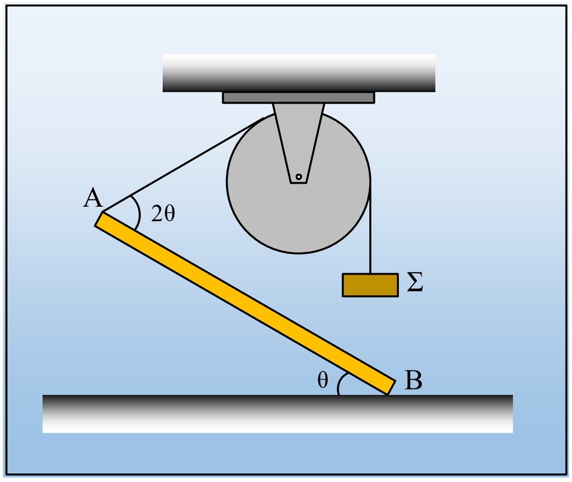
Ένα σύστημα σε ισορροπία.



Το σύστημα του σχήματος ισορροπεί, με την ομογενή ράβδο ΑΒ, μάζας Μ=2kg, να σχηματίζει γωνία θ, όπου ημθ=0,6, με το οριζόντιο επίπεδο. Με ένα αβαρές νήμα, το οποίο έχουμε περάσει από τροχαλία, ακτίνας R=0,3m και μάζας επίσης Μ, έχουμε συνδέσει το άκρο Α της ράβδου με υλικό σημείο Σ μάζας m=0,4kg, ενώ η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την ράβδο είναι ίση με 2θ. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, που περνά από το κέντρο της, με τον οποίο εμφανίζει τριβές.

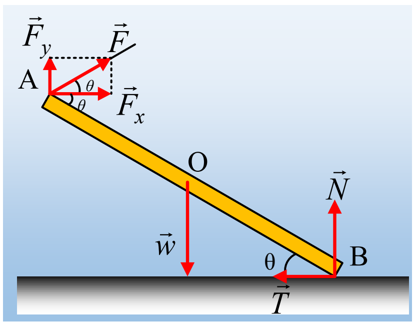
i) Να μελετηθεί η ισορροπία της ράβδου, υπολογίζοντας την τριβή που δέχεται από το οριζόντιο επίπεδο, καθώς και την δύναμη F που δέχεται από το νήμα, στο άκρο της Α.

ii) Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της.

iii) Πόση είναι η ροπή των τριβών που ασκούνται στην τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της και της εξασφαλίζουν την μη περιστροφή της;

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπου η τάση του νήματος F έχει αναλυθεί σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα, λαμβάνοντας υπόψη ότι η F_x σχηματίζει γωνία θ τόσο με το νήμα, όσο και με τη ράβδο. Από τη συνθήκη ισορροπίας της ράβδου παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_x\text{-}T=0 \rightarrow F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = T \; (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_y+N\text{-}w=0 \rightarrow F\cdot\eta\mu\theta + N - Mg = 0 \; (2)$$

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow \Sigma\tau_A=0 \rightarrow N\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - T\cdot\ell\cdot\eta\mu\theta - Mg\cdot \tfrac{1}{2}\,\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \; (3)$$

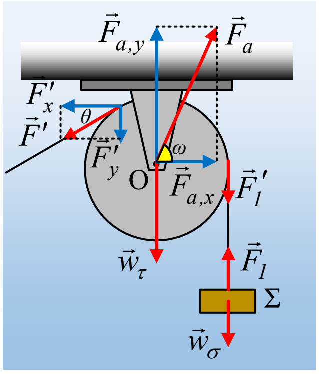
Με αριθμητικές αντικαταστάσεις στις (2) και (3) και λαμβάνοντας υπόψη την (1) παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} &F\cdot 0{,}6+ N=20 \; (2^{\alpha}) \\ &N\cdot 0{,}8\text{-}F\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6= 20\cdot \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}8 \; (3^{\alpha}) \end{aligned}\right\} N=15N \;\kappa\alpha\iota\; F = 25/3\; N$$

Και επιστρέφοντας στην (1) βρίσκουμε:

$$T = F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{25}{3} \cdot 0,8N = \frac{20}{3}N$$

ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε τροχαλία και σώμα Σ, όπου F΄ η τάση του αριστερού τμήματος του νήματος, ίσου μέτρου με την δύναμη F, που υπολογίσαμε παραπάνω.



Εξάλλου η γωνία που σχηματίζει το αριστερό νήμα με την οριζόντια διεύθυνση είναι ξανά θ, οπότε για τις συνιστώσες της F΄ έχουμε:

$$F_x'=F'\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = F_x = 20/3\ N$$

$$F_y' = F'\cdot\eta\mu\theta = F\cdot\eta\mu\theta = F_y = 5N.$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_1=w_\sigma = mg = 0,4\cdot 10N=4N$$

Οπότε το νήμα ασκεί στην τροχαλία την δύναμη F_1'=4N με φορά προς τα κάτω, όπως στο σχήμα.

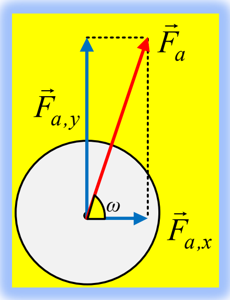
Παίρνουμε τώρα την ισορροπία της τροχαλίας:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_{\alpha,x}-F_x'=0 \rightarrow F_{\alpha,x}=F_x'=20/3N \quad (4)$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_{\alpha y}-w_\tau-F_y'-F_1'=0 \rightarrow F_{\alpha y} = w_\tau + F_y' + F_1' = 20N+5N+4N=29N \quad (5)$$

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow \Sigma\tau_o=0 \quad (6)$$

Οπότε (με βάση και το διπλανό σχήμα, για πιο ξεκάθαρη εικόνα!!!) έχουμε:



$$F_\alpha = \sqrt{F_{a,x}^2 + F_{a,y}^2} = \sqrt{\left(20/3\right)^2 + 29^2}\,N \approx 29,8N \text{ και}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{F_y}{F_x} = \frac{29}{20/3} = 4,35$$

iii) Επιστρέφοντας στην σχέση (6) για την ισορροπία των ροπών που δέχεται η τροχαλία και έχοντας υπολογίσει και την δύναμη που δέχεται από τον άξονα περιστροφής, θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι με βάση τις δυνάμεις που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, η τροχαλία ισορροπεί και στροφικά, γράφοντας (οι αριστερόστροφες ροπές θετικές):

$$\tau_{w_\tau} + \tau_{F_1'} + \tau_{F'} + \tau_{F_\alpha} = 0 \rightarrow$$

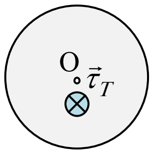
$$0 - F_1'R + F'R + 0 = 0 \rightarrow F_1' = F' \quad \acute{\alpha}\tau o\pi o$$

Συνεπώς για την εξασφάλιση της ισορροπίας, απαιτείται και κάποια άλλη ροπή και αυτή πρέπει να είναι ροπή ζεύγους . Τέτοια ροπή μπορεί να ασκεί μόνο ο άξονας λόγω τριβών:

$$\tau_{w_\tau} + \tau_{F_1'} + \tau_{F'} + \tau_{F_\alpha} + \tau_T = 0 \rightarrow$$

$$0 - F_1'R + F'R + 0 + \tau_T = 0 \rightarrow \tau_T = F_1'R - F'R \rightarrow$$

$$\tau_T = 4 \cdot 0,3Nm - \frac{25}{3} \cdot 0,3Nm = -1,3Nm$$



Με κατεύθυνση πάνω στον άξονα και φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com