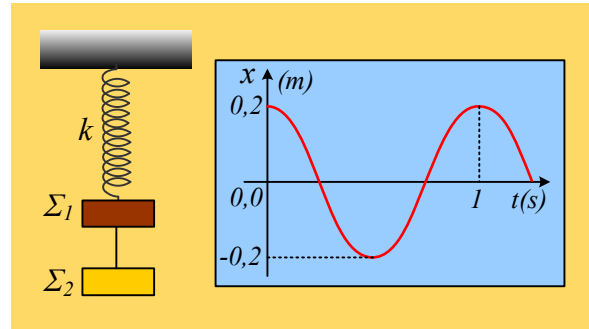


Το σύστημα και η τάση του νήματος

Τα σώματα Σ_1 με μάζα $m_1=3\text{kg}$ και Σ_2 ηρεμούν στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=200\text{N/m}$, όπως στο σχήμα, δεμένα με αβαρές και μη ελαστικό νήμα. Εκτρέπουμε τα σώματα κατακόρυφα προς τα πάνω και τα αφήνουμε να ταλαντωθούν τη στιγμή $t_0=0$. Στο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης (κάθε σώματος από τη δική του θέση ισορροπίας) σε συνάρτηση με το χρόνο.



- i) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Σ_2 , καθώς και η αρχική ($t=0$) δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
- ii) Να βρεθεί η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα Σ_2 σε συνάρτηση με την απομάκρυνση και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, έχοντας αντικαταστήσει το νήμα που συνδέει τα σώματα με άλλο που έχει όριο θραύσεως $T_0=28\text{N}$.
 - α) Σε ποια θέση θα σπάσει το νήμα;
 - β) Να βρεθεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ_1 , μετά το σπάσιμο του νήματος.

Δίνεται ότι ένα σώμα που ταλαντώνεται στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου εκτελεί ΑΑΤ, $g=10\text{m/s}^2$, ενώ $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

- i) Αφού η ίδια καμπύλη $x-t$ δίνεται και για τα δυο σώματα, σημαίνει ότι τα δυο σώματα ταλαντώνονται μαζί, χωρίς να λυγίζει το νήμα ή να κόβεται. Αλλά τότε μπορούμε να «δούμε» τα δυο σώματα σαν ένα σώμα Σ , μάζας $M=m_1+m_2$ που εκτελεί ΑΑΤ, στο κάτω άκρο ενός ελατηρίου, με σταθερά επαναφοράς $D=k$. Για την περίοδο του σώματος Σ , έχουμε:

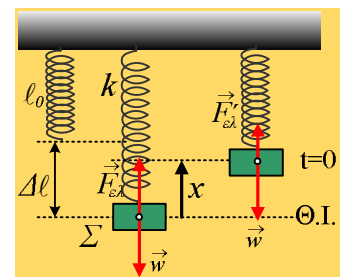
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{M}{k} \rightarrow$$

$$M = k \frac{T^2}{4\pi^2} = 200 \frac{1}{4 \cdot 10} \text{kg} = 5\text{kg}$$

Αλλά $M=m_1+m_2 \rightarrow m_2=2\text{kg}$.

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στην θέση ισορροπίας και στην αρχική θέση $x=A=0,2\text{m}$. Από την ισορροπία του σώματος παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}-w=0 \rightarrow k \cdot \Delta \ell = Mg \rightarrow$$



$$\Delta \ell = \frac{Mg}{k} = \frac{5 \cdot 10}{200} m = 0,25m$$

Συνεπώς τη στιγμή $t=0$ το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta \ell = \Delta \ell_0 - A = 0,25m - 0,2m = 0,05m$ και δυναμική ενέργεια:

$$U = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} 200 \cdot (0,05)^2 J = 0,25J$$

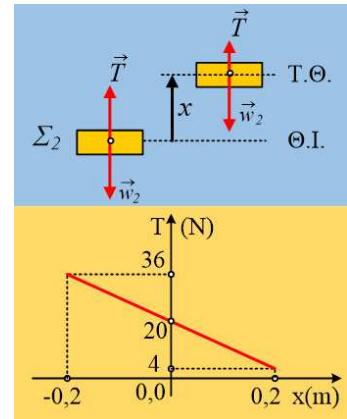
- ii) Αν σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x , θα έχουμε το διπλανό σχήμα, όπου:

$$\Sigma F_2 = T - w_2 = m_2 \cdot a \rightarrow$$

$$T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot (-\omega^2 \cdot x) \rightarrow T = m_2 g - 4\pi^2 \cdot m_2 \cdot x \rightarrow$$

$$T = 20 - 80x \quad (1) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου το πεδίο ορισμού παίρνει τιμές από $x = -0,2m$ (κάτω ακραία θέση), μέχρι $x = +0,2m$ (πάνω ακραία θέση).



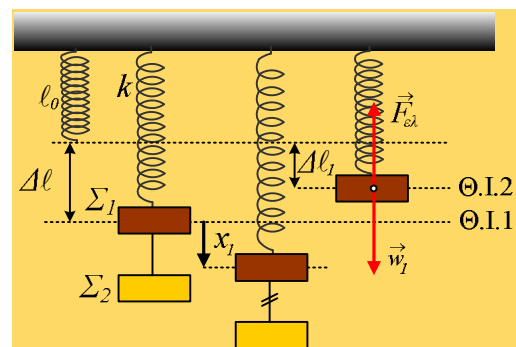
- iii) Με την αλλαγή του νήματος, δεν άλλαξε κάτι παρά μόνο η μέγιστη τιμή της τάσης του νήματος, $T_0 = 28N$, αφού μόλις πάρει την παραπάνω τιμή το νήμα θα κοπεί.

- α) Έτσι αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) $T = 28N$ παίρνουμε:

$$T = 20 - 80x \rightarrow 28 = 20 - 80x_I \rightarrow x_I = -0,1m$$

Δηλαδή το νήμα θα κοπεί κάτω από την θέση ισορροπίας σε απόσταση $0,1m$.

- β) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η αρχική θέση ισορροπίας (Θ.Ι.1) του σώματος Σ_1 , όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta \ell = 0,25m$. Μόλις κοπεί το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα σε απομάκρυνση $x_I = -0,1m$, το σώμα Σ_1 θα εκτελέσει μια νέα ΑΑΤ, γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας (Θ.Ι.2) όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta \ell_1$. Από την ισορροπία του Σ_1 παίρνουμε:



$$\Sigma F_I = 0 \rightarrow F_{ελ} - w_I = 0 \rightarrow k \cdot \Delta \ell_I = m_I g \rightarrow$$

$$\Delta \ell_1 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{3 \cdot 10}{200} m = 0,15m$$

Συνεπώς τη στιγμή που το σώμα Σ_1 αρχίζει τη νέα ταλάντωσή του, βρίσκεται σε απομάκρυνση από τη νέα θέση ισορροπίας του ίση με:

$$x_2 = -[(\Delta \ell - \Delta \ell_1) + |x_I|] = -[(0,25 - 0,15) + 0,1] = -0,2m$$

Ερχόμαστε τώρα στην πρώτη ταλάντωση του συστήματος και με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης βρίσκουμε για τη θέση x_1 που κόβεται το νήμα:

$$K + U = E_{τ, I} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{k(A^2 - x_1^2)}{M}}$$

Οπότε η ενέργεια της νέας ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει το σώμα Σ_1 είναι ίση:

$$K+U = E_{\tau,2} \rightarrow E_{\tau,2} = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \rightarrow$$

$$E_{\tau,2} = \frac{1}{2} m_1 \frac{k(A^2 - x_1^2)}{M} + \frac{1}{2} k x_2^2 \rightarrow$$

$$E_{\tau,2} = \frac{1}{2} 3 \frac{200(0,2^2 - 0,1^2)}{5} J + \frac{1}{2} 200 \cdot 0,2^2 J = 5,8 J$$

dmargaris@gmail.com