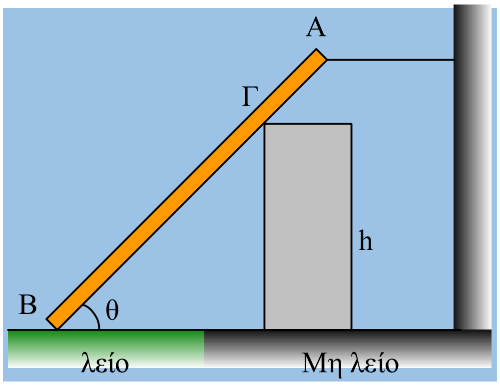
# Το εμπόδιο εξασφαλίζει την ισορροπία

Μια ομογενής λεία ράβδος ΑΒ, μήκους ℓ=1m και βάρους w=40N, ισορροπεί όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία θ με το λείο οριζόντιο επίπεδο, όπου ημθ=0,6 (συνθ=0,8), δεμένη με οριζόντιο νήμα, στο άκρο της Α. Η ράβδος στηρίζεται στην κορυφή Γ ενός βαρέος ορθογωνίου, ύψους h, το οποίο ισορροπεί σε μη λείο επίπεδο.



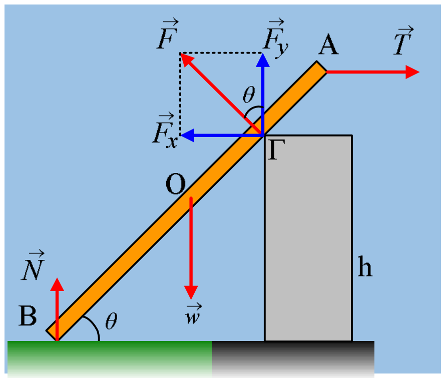

i) Αν h=45,6cm, να υπολογιστεί η τάση του νήματος και η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το οριζόντιο επίπεδο.

ii) Να βρεθεί το ελάχιστο ύψος $h_{min}$ του ορθογωνίου, ώστε να μην χάνει η ράβδος την επαφή με το λείο οριζόντιο επίπεδο, διατηρώντας σταθερή την κλίση της θ με το επίπεδο, με δεδομένο ότι το ορθογώνιο παραμένει ακίνητο.

iii) Να βρεθεί η τριβή που ασκείται στο ορθογώνιο από το επίπεδο στην παραπάνω περίπτωση,

### *Απάντηση.*

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπου η δύναμη F στο σημείο στήριξης Γ, (κάθετη στη λεία ράβδο) έχει αναλυθεί σε δυο συνιστώσες $F_x$ και $F_y$, όπου η γωνία μεταξύ της F και της $F_y$ είναι θ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).




i) Η ράβδος ισορροπεί συνεπώς ισχύει ότι ΣF=0 και Στ=0 ως προς οποιοδήποτε σημείο. Αναλύοντας σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα και παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο Β βρίσκουμε:

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T=F_x \rightarrow T=F\cdot\eta\mu\theta$ (1)

$\Sigma F_y=0 \rightarrow N+F_y-w=0 \rightarrow N+F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta= w$ (2)

$\Sigma\tau_B=0 \rightarrow F\cdot(B\Gamma)-T\cdot \ell\cdot\eta\mu\theta-w\cdot \frac{1}{2}\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0$ (3)

Όμως:

$$\eta\mu\theta = \frac{h}{(B\Gamma)} \rightarrow (B\Gamma) = x = \frac{h}{\eta\mu\theta} = \frac{45,6}{0,6}cm = 76cm$$

και με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$F\cdot x-F\cdot \ell \cdot\eta\mu^2\theta= \frac{1}{2} w\cdot \ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

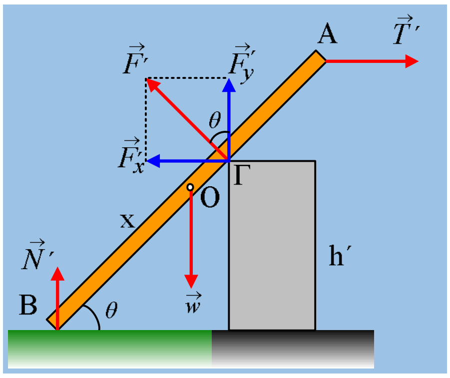
$$F = \frac{w\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{2(x-\ell\cdot\eta\mu^2\theta)} = \frac{40\cdot 1\cdot 0,8}{2(0,76-1\cdot 0,6^2)}N = 40N$$

Οπότε με αντικατάσταση στις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$T=F\cdot\eta\mu\theta\ =40\cdot 0,6N=24N$$

$$N=w-F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=40\ N-40\cdot 0,8N=8N$$

ii) Έστω ότι το ορθογώνιο είχε ύψος h΄ και έστω x η απόσταση (ΒΓ) του σημείου στήριξης Γ από το άκρο Β, όπου στη θέση αυτή η αντίδραση του επιπέδου N΄ τείνει στο μηδέν.




Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί ξανά οι δυνάμεις στη ράβδο. Οι παραπάνω εξισώσεις για την ισορροπία της ράβδου γίνονται:

$$\Sigma F_x= 0\ \rightarrow T'=F'_x \rightarrow T'=F'\cdot\eta\mu\theta\ \ (1\alpha)$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N'+F'_y-w=0 \rightarrow N'+F'\cdot\sigma\upsilon\nu\theta= w\ \ (2\alpha)$$

$$\Sigma\tau_B=0 \rightarrow F'\cdot(B\Gamma)-T'\cdot \ell\cdot\eta\mu\theta-w\cdot \tfrac{1}{2}\, \ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0\ \ \ (3\alpha)$$

Θέτοντας N΄≥ 0 στην (2) παίρνουμε:

$$w - F'\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\ \geq 0 \rightarrow$$

$$F' \leq \frac{w}{\sigma\upsilon\nu\theta} \rightarrow F' \leq \frac{40N}{0{,}8} \rightarrow F' \leq 50N$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στη θέση που μηδενίζεται η αντίδραση του επιπέδου, η δύναμη στη ράβδο από το ορθογώνιο στο σημείο Γ, παίρνει την μέγιστη τιμή της $F_{max}$=50Ν. Αλλά από την ($3^{\alpha}$) όταν η δύναμη F΄ πάρει την μέγιστη τιμή της (θα πάρει επίσης την μέγιστη τιμή της και η τάση του νήματος) η απόσταση (ΒΓ) θα πάρει την μικρότερη δυνατή τιμή της. Έτσι με αντικατάσταση της τιμής αυτής στην ($1^{\alpha}$) βρίσκουμε T΄=30Ν και στη συνέχεια από ($3^{\alpha}$) παίρνουμε:

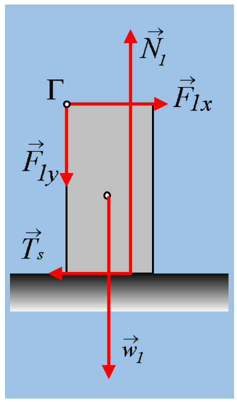
$$50\cdot x-30\cdot 1\cdot 0,6-40\cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1\cdot 0,8=0 \rightarrow$$

$$x=68cm$$

Οπότε το ελάχιστο ύψος του ορθογωνίου είναι:

$$h_{min}=x\cdot\eta\mu\theta= 68\cdot 0,6cm = 40,8\ cm$$

iii) Αφού το ορθογώνιο ασκεί στη ράβδο τη δύναμη F΄ δέχεται την αντίδρασή της με συνιστώσες $F_{1x}$ και $F_{2x}$, όπως στο σχήμα, καθώς και την στατική τριβή (αφού παραμένει ακίνητο…) και την κάθετη αντίδραση $N_1$.




Από την ισορροπία του ορθογωνίου έχουμε:

$$\Sigma F_x= 0 \rightarrow T_s=F_{1x}=F'\cdot\eta\mu\theta = 50\cdot 0,6N=30N$$

**dmargaris@gmail.com**