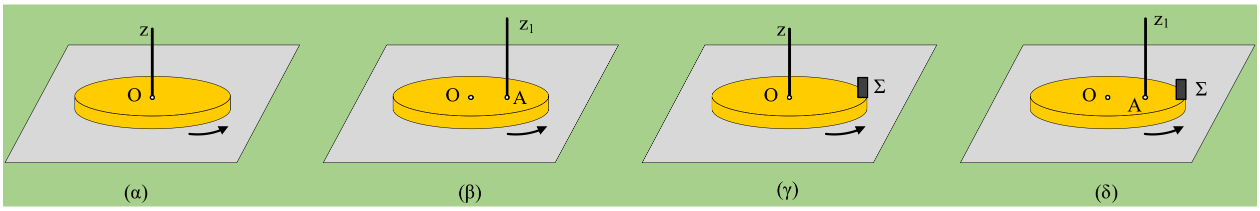
Ο ρόλος του άξονα περιστροφής

Σε επαφή με λείο οριζόντιο επίπεδο στρέφεται ένας ομογενής δίσκος, μάζας m με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από σταθερό (υπαρκτό) κατακόρυφο άξονα, χωρίς τριβές. Η στροφορμή του δίσκου στο (α) σχήμα γύρω από τον άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του, έχει μέτρο L_o.



i) Αν στο (β) σχήμα ο δίσκος στρέφεται γύρω από τον άξονα z_1 ο οποίος περνά από το σημείου Α, όπου (ΟΑ) = ½ R, με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, τότε:

α) Για το μέτρο της στροφορμής του δίσκου $L_β$, γύρω από τον άξονα z_1 ισχύει:

a) $L_β=L_o$, b) $L_β=1{,}5L_o$, c) $L_β=2L_o$ d) $L_β=2{,}5L_o$.

β) Για την δύναμη που κάθε άξονας ασκεί στο δίσκο, ισχύει:

a) $F_α=F_β=0$, b) $F_α=F_β\neq 0$, c) $F_α=0$ και $F_β\neq 0$, d) $F_α\neq 0$ και $F_β=0$.

ii) Στα σχήματα (γ) και (δ), στο άκρο μιας ακτίνας του δίσκου, έχει προσκολληθεί ένα σώμα Σ, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο αμελητέων διαστάσεων, μάζας επίσης m, με αποτέλεσμα να παίρνουμε ένα στερεό s με κέντρο μάζας το σημείο Α. Το στερεό s στρέφεται επίσης με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από τους αντίστοιχους άξονες z και z_1.

α) Για το μέτρο της στροφορμής του στερεού $L_δ$, γύρω από τον άξονα z_1 ισχύει:

a) $L_δ=L_o$, b) $L_δ=2L_o$, c) $L_δ=3L_o$ d) $L_δ=4L_o$.

β) Αν $F_β$ το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας z_1 στο δίσκο του (β) σχήματος, τότε για τα μέτρα των αντίστοιχων δυνάμεων στα σχήματα (γ) και (δ) ισχύουν:

a) $F_γ=0$ και $F_δ=2F_β$, b) $F_γ=2F_β$, $F_δ=0$, c) $F_γ=0$ και $F_Β=0$, d) $F_γ=4F_β$ και $F_δ=2F_β$.

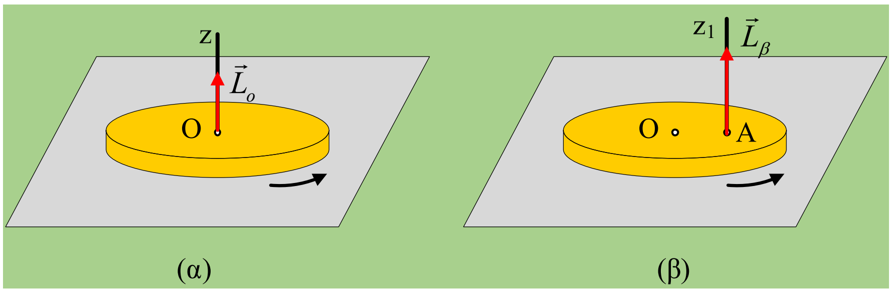
Απάντηση:

i) Η ροπή αδράνειας του δίσκου γύρω από τον άξονα z_1, με την βοήθεια του θεωρήματος Steiner, προκύπτει:

$$I_{z_1}=I_{cm}+m\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{4}mR^2=\frac{3}{4}mR^2$$

α) Η στροφορμή του δίσκου ως προς τους άξονες z και z_1 έχει την κατεύθυνση κάθε άξονα, όπως στο παρακάτω σχήμα, με μέτρα:

Ως προς τον άξονα z: $L_z=L_o=I_{cm}\omega=\frac{1}{2}mR^2\omega$



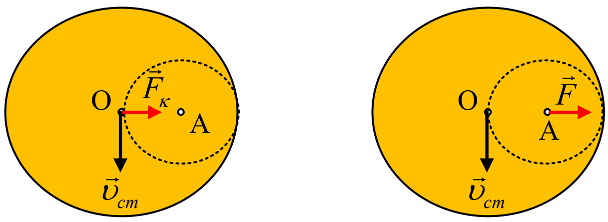
Ως προς τον άξονα z_1 στο (β) σχήμα:

$$L_\beta = L_{z_1} = I_{z_1}\omega = \frac{3}{4}mR^2\omega = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega = \frac{3}{2}L_o$$

Σωστό το b).

β) Αφού ο δίσκος είναι ομογενής το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο του Ο. Αλλά αφού αυτός περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z, στο (α) σχήμα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του είναι μηδενική. Συνεπώς ο άξονας z δεν χρειάζεται να ασκεί κάποια δύναμη στο δίσκο για την παραπάνω περιστροφή.

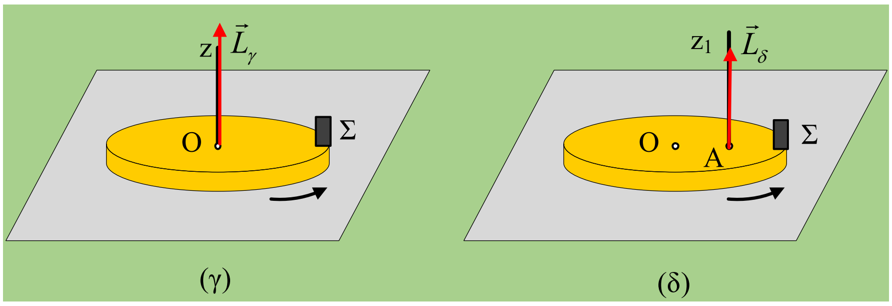
Αντίθετα στο (β) σχήμα, το κέντρο μάζας Ο εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το Α, με αποτέλεσμα να απαιτείται η ύπαρξη κεντρομόλου δύναμης, για την κίνηση αυτή. Έτσι εφόσον το κέντρο μάζας θεωρούμε πως δέχεται συνισταμένη δύναμη, με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς Α (πρώτο σχήμα), θα πρέπει ο άξονας να ασκεί στο δίσκο την δύναμη F, όπως στο δεύτερο σχήμα (ο δίσκος σε κάτοψη), με μέτρο $\Sigma F = m\cdot\alpha_{cm}$ όπου:



$$F_\beta = m\frac{\upsilon^2}{r} = m\omega^2 r = \frac{1}{2}m\omega^2 R \ (1)$$

Σωστό το: c) $F_\alpha = 0$ και $F_\beta \neq 0$,

ii) Η στροφορμή του στερεού μας στα σχήματα (γ) και (δ), έχει τη διεύθυνση του άξονα, όπως στο παρακάτω σχήμα:



α) Στο σχήμα (δ) ο άξονας z_1 περνά από το κέντρο μάζας Α του στερεού s. Η στροφορμή L_δ βρίσκεται πάνω στον άξονα z_1 και φορά προς τα πάνω, με μέτρο:

$$L_\delta = L_{z_1} = I_{z_1}\omega = \left(I_\delta + I_\Sigma\right)\omega \ \rightarrow$$

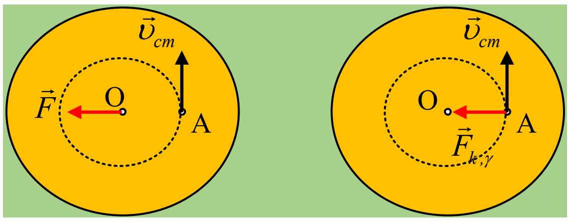
$$L_\delta = \left(\frac{3}{4}mR^2 + m\frac{R^2}{4}\right)\omega = mR^2\omega = 2\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega = 2L_o$$

Σωστό το b).

β) Στο σχήμα (δ) το στερεό s στρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του, το οποίο παραμένει ακίνητο, συνεπώς $\Sigma F_{cm}=0$, οπότε ο άξονας δεν ασκεί κάποια δύναμη στο στερεό μας.

Αντίθετα στο (γ) σχήμα, το κέντρο μάζας Α του στερεού, στρέφεται γύρω από τον άξονα στο Ο, με αποτέλεσμα ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma F = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$



Πράγμα που σημαίνει ότι ο άξονας z, ασκεί στο στερεό μας τη δύναμη F, όπως στο πρώτο σχήμα ή ισοδύναμα το κέντρο μάζας Α δέχεται την δύναμη $F_{\kappa,\gamma}$, όπως στο δεύτερο σχήμα, με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, μέτρου:

$$F_\gamma = F_{k,\gamma} = M\frac{\upsilon^2}{r} = M\omega^2 r = 2m\omega^2\frac{R}{2} = m\omega^2 R \xrightarrow{(1)}$$

$$F_\gamma = 2F_\beta$$

Σωστό το b) $F_\gamma=2F_\beta$, $F_\delta=0$,

dmargaris@gmail.com