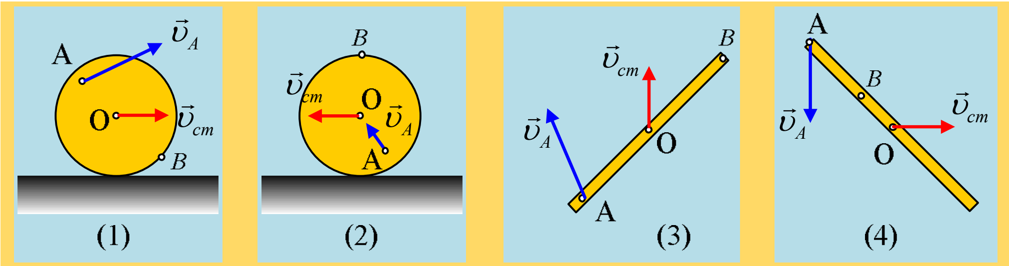
Ξεκινώντας από τις ταχύτητες δύο σημείων

Στο σχήμα δίνονται 4 περιπτώσεις στερεών. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις ένας ομογενής τροχός κινείται σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ στις δύο τελευταίες (τα σχήματα σε κάτοψη), μια ομογενής ράβδος κινείται σε οριζόντιο επίπεδο.



Στα σχήματα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του κέντρου μάζας O και ενός σημείου A, κάθε στερεού. Για καθεμία από τις 4 περιπτώσεις:

α) Να σημειώστε πάνω στο σχήμα το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.

β) Να σχεδιάσετε την ταχύτητα του σημείου B.

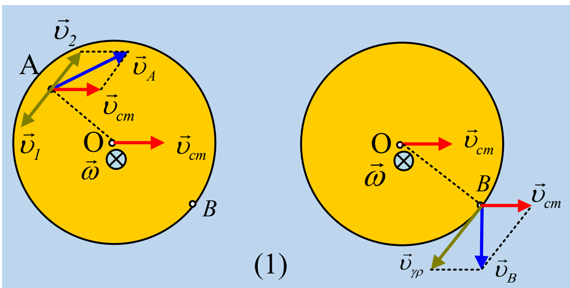
Να δώσετε σύντομες δικαιολογήσεις.

Απάντηση:

Θεωρούμε την κίνηση κάθε στερεού ως σύνθετη μια μεταφορική με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ και μια στροφική γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας O, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας. Έτσι η ταχύτητα του σημείου A προκύπτει ως το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{cm}$ και της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ λόγω της περιστροφικής κίνησης. Δηλαδή ισχύει:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$$

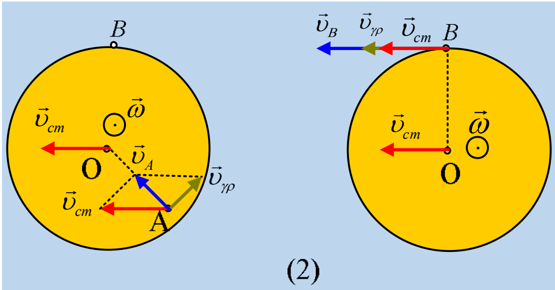
1) Ας έρθουμε στο (1) σχήμα:



α) Η γραμμική ταχύτητα του σημείου A λόγω της κυκλικής κίνησής του γύρω από το κέντρο O, θα είναι κάθετη στην ακτίνα (OA), είτε όπως το διάνυσμα $\vec{\upsilon}_1$, είτε όπως το διάνυσμα $\vec{\upsilon}_2$. Είναι φανερό ότι η ταχύτητα του σημείου A (η οποίας μας δίνεται) προκύπτει από την σύνθεση της $\vec{\upsilon}_{cm}$ με την $\vec{\upsilon}_2$, πράγμα που σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα μέσα (ο τροχός στρέφεται ωρολογιακά).

β) Αν τώρα έρθουμε στο σημείο Β έχει τις δυο συνιστώσες ταχύτητας που έχουν σημειωθεί στο δεύτερο σχήμα, με αποτέλεσμα η ταχύτητά του, να είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$.

2) Για το σχήμα (2), με την ίδια λογική:

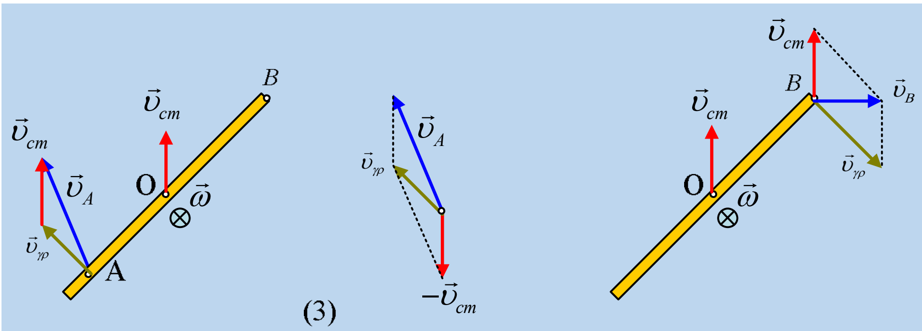


(2)

α) Αφού η $\vec{\upsilon}_{cm}$ είναι οριζόντια, ενώ η $\vec{\upsilon}_A$ κατευθύνεται προς το κέντρο Ο, η γραμμική ταχύτητα πρέπει να έχει την κατεύθυνση του πρώτου σχήματος, που μας οδηγεί σε γωνιακή ταχύτητα, κάθετη στο σχήμα, με φορά προς τα έξω.

β) Με βάση την γωνιακή ταχύτητα του α) ερωτήματος, το σημείο Β έχει και την υ_{cm} και την $\upsilon_{\gamma\rho}$ με κατεύθυνση προς τα αριστερά, οπότε και η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$ έχει την ίδια κατεύθυνση, όπως στο δεξιό σχήμα.

3) Ερχόμαστε στο (3) σχήμα:



(3)

α) Μπορούμε να σκεφτούμε όπως στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. Ας δοκιμάσουμε όμως έναν εναλλακτικό δρόμο.

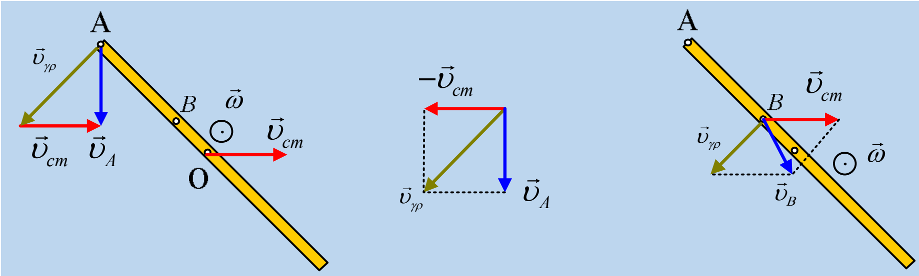
Για την ταχύτητα του σημείου Α γράφουμε:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \rightarrow \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} = \vec{\upsilon}_A - \vec{\upsilon}_{cm} \rightarrow$$
$$\vec{\upsilon}_{\gamma\rho} = \vec{\upsilon}_A + (-\vec{\upsilon}_{cm})$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι για να βρούμε την $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$, δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε διανυσματικά την $\vec{\upsilon}_A$ και την $-\vec{\upsilon}_{cm}$, όπως στο μεσαίο σχήμα. Αλλά τότε η ράβδος στρέφεται ωρολογιακά και το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ είναι όπως έχει σημειωθεί στο πρώτο σχήμα.

β) Με βάση τα παραπάνω οι συνιστώσες ταχύτητας και η ταχύτητα του άκρου Β, έχουν σχεδιαστεί στο δεξιό σχήμα.

4) Τέλος για το (4) σχήμα, με βάση το τελευταίο ερώτημα θα έχουμε:

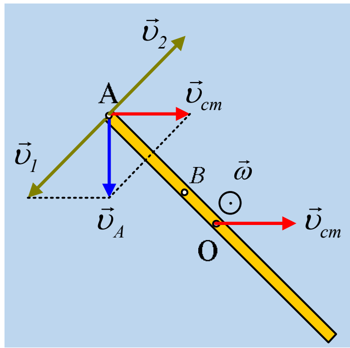


α) Για την ταχύτητα του σημείου A έχουμε:

$$\vec{\upsilon}_{\gamma\rho} = \vec{\upsilon}_A + (-\vec{\upsilon}_{cm})$$

Όπως στο μεσαίο σχήμα, με βάση το οποίο καταλήγουμε ότι η ράβδος στρέφεται ανθωρολογιακά.

β) Αλλά τότε με βάση τη φορά της γωνιακής ταχύτητας, σχεδιάζουμε τις συνιστώσες ταχύτητες του σημείου B, όπως στο δεξιό σχήμα.



Εναλλακτικά, ας εφαρμόσουμε την μέθοδο του (1) σχήματος:

Η γραμμική ταχύτητα του άκρου A θα είναι ή το διάνυσμα $\vec{\upsilon}_1$ ή το διάνυσμα $\vec{\upsilon}_2$. Αλλά τότε η σύνθεση των $\vec{\upsilon}_2$ και $\vec{\upsilon}_{cm}$ δεν θα μας έδινε την ταχύτητα του άκρου A που μας δόθηκε.

Αντίθετα αν πάρουμε το παραλληλόγραμμο των $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_{cm}$, βρίσκουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$, όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com