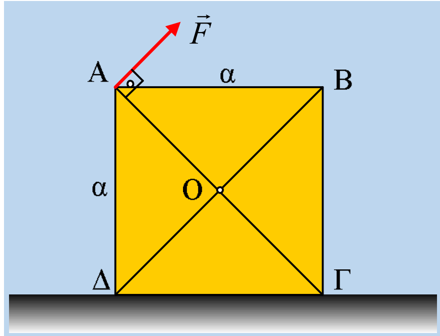
Μια τετράγωνη πλάκα που δεν ανατρέπεται…

Μια ομογενής τετράγωνη πλάκα πλευράς α=1m και μάζας 50kg (w=500N) ηρεμεί όρθια, σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,3$. Ασκούμε στην κορυφή Α μια δύναμη F, κάθετη στη διαγώνιο ΑΓ, όπως στο σχήμα.



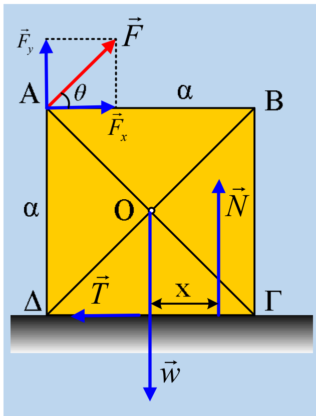
i) Αν η δύναμη F έχει μέτρο F=100N, να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στην πλάκα και να βρεθούν οι ροπές τους ως προς το κέντρο της Ο.

ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση της κορυφής Α, αν αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης στην τιμή F_1=170N.

iii) Ποια είναι η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να αποκτήσει το κέντρο μάζας Ο της πλάκας, χωρίς να αρχίσει η πλάκα να ανατρέπεται και για ποια τιμή της ασκούμενης δύναμης θα συμβεί αυτό;

Απάντηση:

i) Αν η δύναμη F είναι κάθετη στη διαγώνιο ΑΓ, τότε σχηματίζει γωνία θ=45° με την πλευρά ΑΒ και αναλύοντάς την σε δύο συνιστώσες (οριζόντια και κατακόρυφη) παίρνουμε:



$$F_x = F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 100N\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}N = F_y$$

Αφού το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο.

Αυτό που δεν ξέρουμε, είναι **τι θα κάνει** η πλάκα;

- Μήπως εγκαταλείψει το επίπεδο κινούμενη προς τα πάνω, έστω πλάγια;
  Η συνιστώσα F_y είναι πολύ μικρότερη του βάρους, οπότε δεν πρόκειται να συμβεί!
- Μήπως η πλάκα επιταχυνθεί προς τα δεξιά; Από την ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση παίρνουμε:

  $$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_y+N=w \rightarrow N = w - F_y = 500N - 50\sqrt{2}N \approx 430N$$

  Αλλά τότε η μέγιστη στατική τριβή, ίση με την τριβή ολίσθησης έχει μέτρο:

  $$T_{op}=T_{o\lambda}=\mu\cdot N=0,3\cdot 430N=129N$$

  Ναι, αλλά τότε η δύναμη F_x δεν μπορεί να «υπερνικήσει» την τριβή και να προκαλέσει την προς τα δεξιά επιτάχυνση, συνεπώς η τριβή θα είναι στατική με μέτρο $T_s=F_x=50\sqrt{2}N \approx 70N$ και η πλάκα θα ισορροπήσει μεταφορικά.
- Μήπως η πλάκα αρχίσει να περιστρέφεται; Ας υποθέσουμε ότι η πλάκα, εξαιτίας της άσκησης της δύναμης, θα περιστραφεί δεξιόστροφα, αλλά τότε θα πρέπει να αρχίσει να ανασηκώνεται, οπότε η

κάθετη αντίδραση του επιπέδου θα ασκείται στην κορυφή Γ. Αν πάρουμε τις ροπές ως προς το κέντρο μάζας Ο, θα έχουμε για τα **μέτρα** δεξιόστροφων και αριστερόστροφων:

(από Π.Θ. $(A\Gamma)=\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}=\alpha\sqrt{2}$)

$$\Sigma\tau_{\delta\varepsilon\xi}=\tau_F+\tau_T=F\cdot\frac{(A\Gamma)}{2}+T_s\cdot\frac{a}{2}=100\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}Nm+50\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}Nm\approx 105Nm$$

$$\Sigma\tau_{\alpha\rho}=N\cdot ½\ \alpha = 430\cdot 0{,}5Nm = 215N\cdot m$$

Πράγμα άτοπο, αφού με $\Sigma\tau_{\alpha\rho} > \Sigma\tau_{\delta\varepsilon\xi}$ και η πλάκα θα αρχίσει να στρέφεται δεξιόστροφα! Άρα δεν θα υπάρξει περιστροφή και τελικά η πλάκα θα ισορροπεί.

Όσον αφορά τις ροπές των ασκούμενων δυνάμεων, ως προς το κέντρο Ο, θεωρώντας τις αριστερόστροφες ροπές ως θετικές, έχουμε:

$$\tau_w=0$$

$$\tau_F=-F\cdot\frac{(A\Gamma)}{2}=-100\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}Nm=-50\sqrt{2}Nm\approx-70Nm$$

$$\tau_T=-T_s\cdot\frac{a}{2}=-50\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}Nm\approx-35Nm$$

Αλλά αφού η πλάκα ισορροπεί, η συνολική ροπή θα είναι μηδενική, συνεπώς:

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow \tau_w+\tau_F+\tau_T+\tau_N=0 \rightarrow \tau_N= -\tau_F-\tau_T \approx +105N\cdot m$$

(Ο φορέας της Ν απέχει κατά x από το κέντρο Ο, όπου $\tau_N=N\cdot x \rightarrow\ x=\frac{105}{430}m=0{,}24m$)

ii) Αν F_1=170N, τότε $F_{1x}=F_{1y}=F_1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=170N\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=85\sqrt{2}N\approx 120N$, οπότε $\Sigma F_y=0$ ή

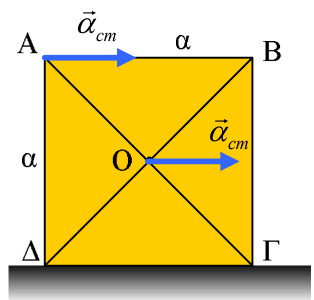
$$N_1=w-F_{1y}=500N-120N=380N$$

$$T_{1o\rho}=T_{1o\lambda}=\mu\cdot N_1=0{,}3\cdot 380N=114N$$

Αλλά τότε η πλάκα επιταχύνεται προς τα δεξιά με επιτάχυνση:

$$\Sigma F_x=ma_1\rightarrow a_1=\frac{F_x-T_1}{m}=\frac{120N-114N}{50kg}=0{,}12m/s^2.$$

Το ερώτημα που μπαίνει τώρα είναι, εκτός της μεταφορικής κίνησης, μήπως η πλάκα ανατρέπεται, αποκτώντας και γωνιακή επιτάχυνση; Δεν θα αρχίσει να στρέφεται αν ο φορέας της κάθετης αντίδρασης απέχει κατά x_1< ½ α από το κέντρο Ο. Αν υποθέσουμε ότι ισορροπεί, τότε:



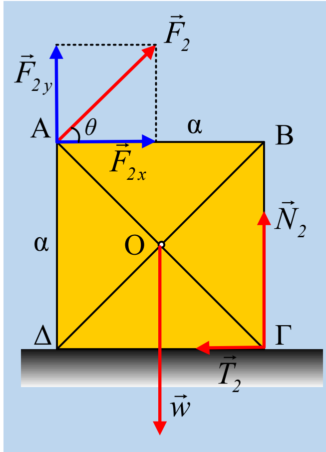
$$\Sigma\tau_o=0\rightarrow\tau_{F_1}+\tau_{T_1}+\tau_{N_1}=0\rightarrow$$

$$-F_1\cdot\frac{(A\Gamma)}{2}-T_1\cdot\frac{a}{2}+N_1x_1=0\rightarrow$$

$$-170\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-114\cdot\frac{1}{2}+380\cdot x_1=0\rightarrow$$

$$x_1 = 0,46m < 0,5m$$

Συνεπώς η πλάκα εκτελεί μεταφορική κίνηση και η κορυφή Α έχει επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο, δηλαδή α_A=0,12m/s^2.



Η μέγιστη επιτάχυνση της πλάκας θα είναι αυτή όπου η αντίδραση του επιπέδου ασκείται στην κορυφή Γ, πράγμα που πρακτικά σημαίνει ότι η πλάκα «είναι έτοιμη» να περιστραφεί και στηρίζεται στο έδαφος, μόνο στην κορυφή Γ. Έστω αυτό συμβαίνει με την επίδραση κατάλληλης δύναμης μέτρου F_2 οπότε έχουμε την μέγιστη μεταφορική επιτάχυνση κέντρου μάζας, χωρίς να στρέφεται η πλάκα. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα λαμβάνοντας υπόψη ότι $F_{2x}=F_{2y}$ παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha_x \longrightarrow F_{2x} - T_2 = m\cdot\alpha_{2x} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y= 0 \longrightarrow F_{2y} + N_2 = w \quad (2) \text{ και}$$

$$\Sigma\tau_O=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=0 \rightarrow -2F_{2x}\cdot\frac{\alpha}{2}-T_2\cdot\frac{a}{2}+N_2\cdot\frac{a}{2}=0 \rightarrow N_2=T_2+2F_{2x} \quad (3)$$

Από (2) και (3) παίρνουμε $N_2=\mu N_2 + 2(w - N_2)$ οπότε:

$$N_2=\frac{2w}{3-\mu}\xrightarrow{(2)}F_{2y}=F_{2x}=w-\frac{2w}{3-\mu}=\frac{7}{27}w \rightarrow$$

Με αντικατάσταση στις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$N_2=\frac{2w}{3-\mu}=\frac{2\cdot 500}{3-0,3}N=370N \quad \text{και} \quad F_{2x}=\frac{7}{27}w=\frac{7}{27}500N=130N$$

Αλλά τότε η (1) μας δίνει την μέγιστη δυνατή επιτάχυνση:

$$\alpha_{2x,max}=\frac{F_{2x}-\mu N_2}{m}=\frac{130-0,3\cdot 370}{50}m/s^2=0,38\ m/s^2$$

Η παραπάνω επιτάχυνση επιτυγχάνεται όταν η δύναμη F_2 πάρει την τιμή:

$$\eta\mu\theta=\frac{F_{2y}}{F_2}\rightarrow$$

$$F_2=\frac{F_{2y}}{\eta\mu\theta}=\frac{130N}{\sqrt{2}/2}\approx 184N$$

dmargaris@gmail.com