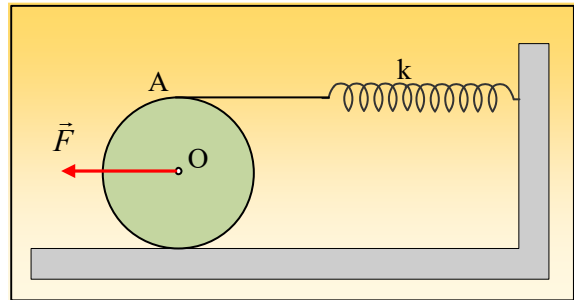


Μια ισορροπία και μια επιτάχυνση μέσω ελατηρίου

Ο ομογενής κύλινδρος του σχήματος μάζας $m=4\text{kg}$ και ακτίνας R , ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ γύρω του έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου συνδέεται οριζόντιο ιδανικό ελατήριο, σταθεράς $k=100\text{N/m}$, με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F=30\text{N}$, η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας του O .

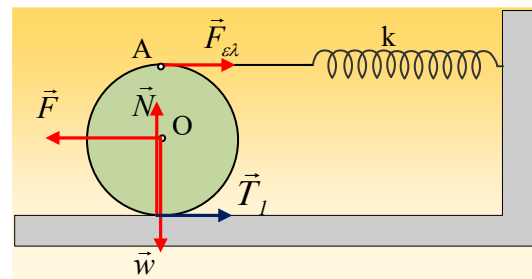


- i) Να δικαιολογήσετε γιατί ο κύλινδρος εμφανίζει τριβή με το επίπεδο.
- ii) Να βρείτε την επιμήκυνση του ελατηρίου, καθώς και τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου, για την παραπάνω ισορροπία.
- iii) Κάποια στιγμή σταματάμε την εξάσκηση της δύναμης F . Να υπολογιστεί η επιτάχυνση την οποία θα αποκτήσει το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου A , καθώς και η τριβή η οποία θα ασκηθεί στον κύλινδρο, αμέσως μόλις αφηθεί να κινηθεί.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Ας υποθέσουμε ότι το επίπεδο είναι λείο. Τότε στο σχήμα έχουν σχεδιασθεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο (εκτός της τριβής που έχει σχεδιαστεί με άλλο χρώμα...). Αφού ο κύλινδρος ισορροπεί θα πρέπει να ισχύει $\Sigma\tau=0$, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Στην περίπτωση όμως του λείου επιπέδου η συνολική ροπή δεν θα ήταν μηδενική αλλά θα είχε μέτρο $F_{ελ} \cdot R$. Άρα στον κύλινδρο θα ασκηθεί και δύναμη τριβής, με κατεύθυνση όπως στο σχήμα, αφού μόνο τότε η συνολική ροπή ως προς O , μπορεί να μηδενιστεί.



- ii) Από την συνθήκη ισορροπίας του κυλίνδρου παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w = mg = 4 \cdot 10\text{N} = 40\text{N}.$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = F_{ελ} + T_l \quad (1)$$

$$\Sigma \tau_o = 0 \rightarrow -F_{ελ} \cdot R + T_l \cdot R = 0 \rightarrow F_{ελ} = T_l \xrightarrow{(1)} 2F_{ελ} = F \rightarrow F_{ελ} = T_l = \frac{F}{2} = 15\text{N}$$

Οπότε από το νόμο του Hooke για το ελατήριο, παίρνουμε:

$$F_{ελ} = k \cdot \Delta l \rightarrow \Delta l = \frac{F_{ελ}}{k} = \frac{15}{100}\text{m} = 0,15\text{m}$$

Ενώ η ασκούμενη τριβή, είναι στατική τριβή, για την οποία ισχύει:

$$T_1 \leq T_{op} \rightarrow T_1 \leq \mu_s N \rightarrow \mu_s \geq \frac{T_1}{N} \rightarrow \mu_s \geq \frac{15}{40} \rightarrow \mu_s \geq 0,375$$

iii) Μόλις καταργηθεί η δύναμη F, τότε ο κύλινδρος θα κινηθεί προς τα δεξιά και έστω T_2 το μέτρο της ασκούμενης τριβής, η οποία συνεχίζει να έχει φορά προς τα δεξιά.

Θεωρώντας την κίνηση του κυλίνδρου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας O του κυλίνδρου, εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για τις επιμέρους κινήσεις:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F_{ελ} + T_2 = m \cdot a_{cm} \quad (2)$$

$$\Sigma \tau_O = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F_{ελ} \cdot R - T_2 \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F_{ελ} - T_2 = \frac{1}{2} m R \cdot \alpha_{γων} \quad (3)$$

Θεωρώντας ότι ο κύλινδρος κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει), θα ισχύει επίσης ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{γων} \cdot R$, οπότε με πρόσθεση των εξισώσεων (2) και (3) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$2F_{ελ} = ma_{cm} + \frac{1}{2} ma_{cm} \Rightarrow 2F_{ελ} = \frac{3}{2} ma_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{4F_{ελ}}{3m} = \frac{4 \cdot 15}{3 \cdot 4} m / s^2 = 5 m / s^2$$

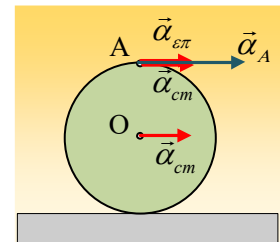
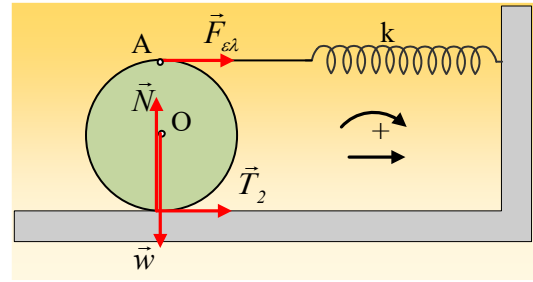
Με αντικατάσταση στην (2) (ή στην (3)...) βρίσκουμε:

$$T_2 = ma_{cm} - F_{ελ} = 4 \cdot 5 N - 15 N = 5 N$$

Η παραπάνω τιμή της τριβής είναι μικρότερη από την προηγούμενη τιμή της στατικής τριβής. Συνεπώς και αυτή είναι στατική και ο κύλινδρος κυλιέται χωρίς να υπάρχει κάποια ολίσθηση.

Ερχόμενοι τώρα στο ανώτερο σημείο A, αυτό έχει επιτάχυνση a_{cm} λόγω μεταφορικής κίνησης και $a_{επ}$ εξαιτίας της στροφικής κίνησης του κυλίνδρου, οπότε αποκτά επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$\alpha_A = a_{cm} + \alpha_{γων} R = 2a_{cm} = 2 \cdot 5 m / s^2 = 10 m / s^2.$$



Σχόλιο:

Μόλις καταργηθεί η δύναμη F, το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι ίσο με $F_{ελ} = k \cdot \Delta l = 15 N$, όσο ήταν και πριν κατά την ισορροπία. Το μέτρο της τριβής όμως, δεν είναι σταθερό, αφού η τριβή θα πάρει τέτοια τιμή που να εξασφαλίζει την κύλιση του κυλίνδρου.

dmargaris@gmail.com