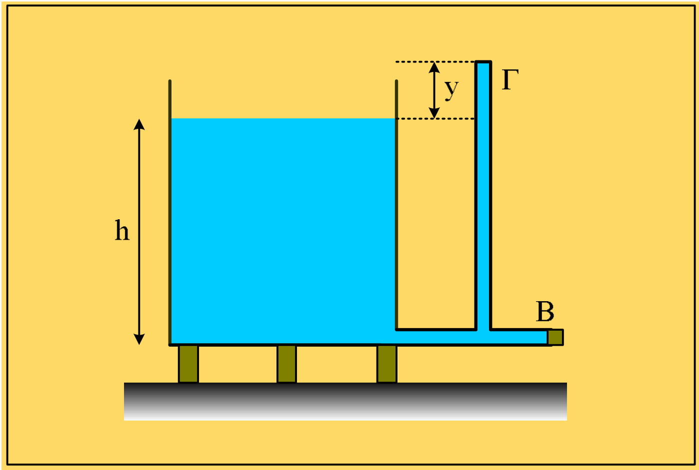
Με κλειστή και ανοικτή τάπα.



Μια μεγάλη κυλινδρική δεξαμενή περιέχει νερό σε ύψος h, ενώ κοντά στον πυθμένα της έχει συνδεθεί ένας οριζόντιος σωλήνας Β, διατομής $A=1cm^2$, ο οποίος φράσσεται στο άκρο του με τάπα. Ένας δεύτερος όμοιος σωλήνας Γ, της ίδιας διατομής, συνδέεται με τον Β, είναι κλειστός και γεμάτος με νερό, όπως στο σχήμα, σε κατακόρυφη θέση.

i) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το νερό στην πάνω επιφάνεια του σωλήνα Γ, αν αυτή βρίσκεται κατά y=0,25m ψηλότερα της ελεύθερης επιφάνειας του νερού της δεξαμενής.

ii) Ανοίγουμε την τάπα και αποκαθίσταται μόνιμη και στρωτή ροή, οπότε το νερό εξέρχεται με ταχύτητα υ=5m/s από το άκρο του Β σωλήνα.

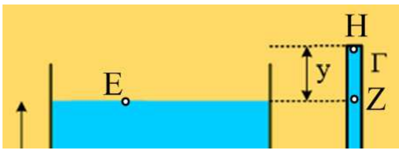
α) Σε πόσο χρόνο θα γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου 20L με νερό που εκρέει από το σωλήνα Β, θεωρώντας σταθερή τη στάθμη του νερού της δεξαμενής;

β) Να υπολογιστεί ο όγκος του νερού της δεξαμενής, αν αυτή έχει βάση εμβαδού $A_1=4m^2$.

γ) Πόση δύναμη ασκεί τώρα το νερό στην πάνω επιφάνεια του σωλήνα Γ;

Δίνονται $p_{ατμ}=10^5N/m^2$, η πυκνότητα του νερού $ρ=1.000kg/m^3$ και $g=10m/s^2$.

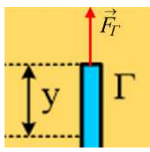
Απάντηση:



i) Τα σημεία Ε στην επιφάνεια της δεξαμενής και Ζ, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, εντός του ίδιου ρευστού, συνεπώς επικρατεί η ίδια πίεση. Αλλά για το σημείο Η στην πάνω επιφάνεια του σωλήνα Γ και το σημείο Ζ ισχύει:

$$p_Z-p_H=ρgy \rightarrow p_H=p_Z-ρgy \rightarrow$$

$$p_H=p_{ατμ}-ρgy= 10^5Pa-1.000\cdot 10\cdot 0,25Pa=97.500Pa$$



Αλλά τότε η δύναμη που το νερό ασκεί στην πάνω βάση του σωλήνα, έχει κατεύθυνση προς τα πάνω (κάθετη την επιφάνεια) και μέτρο:

$$F_Γ=p_H\cdot A=97.500\cdot 1\cdot 10^{-4}N= 9,75N$$

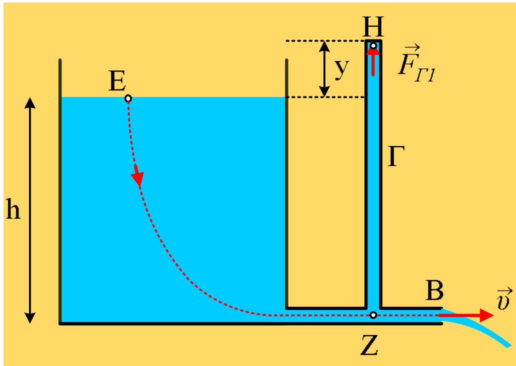
ii) Αφού η ροή είναι μόνιμη η ταχύτητα εκροής παραμένει σταθερή.

α) Η παροχή του νερού που εξέρχεται από το άκρο του σωλήνα Β παραμένει σταθερή (Π=Α·υ), οπότε η στιγμιαία παροχή, είναι ίση με την μέση και ισχύει:

$$\Pi = \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot \upsilon \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{A \cdot \upsilon} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-4} \cdot 5} s = 40s$$

β) Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Ε στην επιφάνεια της δεξαμενής και την έξοδο στο δεξιό άκρο του σωλήνα Β, κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής, παίρνουμε:



$$p_E + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 + \rho g h = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

Αλλά η ταχύτητα ροής στην επιφάνεια είναι μηδενική, ενώ $p_E=p_B=p_{ατμ}$, οπότε η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \rightarrow$$

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 10} m = 1{,}25m$$

Αλλά τότε ο όγκος του νερού στη δεξαμενή είναι ίσος:

$$V=A_1 \cdot h=4 \cdot 1{,}25\ m^3=5\ m^3.$$

γ) Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Z, στο κάτω άκρο του κατακόρυφου σωλήνα και του δεξιού άκρου του οριζόντιου σωλήνα, βρίσκουμε:

$$p_Z + \frac{1}{2}\rho\upsilon_Z^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας $A \cdot \upsilon_Z=A \cdot \upsilon$ ή $\upsilon_z=\upsilon$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$p_z=p_B=p_{ατμ}$$

Μέσα στον κατακόρυφο σωλήνα Γ, έχουμε ακίνητο νερό σε ισορροπία, οπότε για τις πιέσεις θα έχουμε:

$$p_z-p_H=\rho g(h+y) \ \rightarrow p_H=p_z-\rho g(h+y)$$

Και στην πάνω βάση του σωλήνα, ασκείται τώρα κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω, μέτρου:

$$F_{\Gamma 1}=p_H \cdot A=[p_z-\rho g(h+y)] \cdot A=[10^5-1.000 \cdot 10(1{,}25+0{,}25)] \cdot 1 \cdot 10^{-4} N=8{,}5N$$

dmargaris@gmail.com