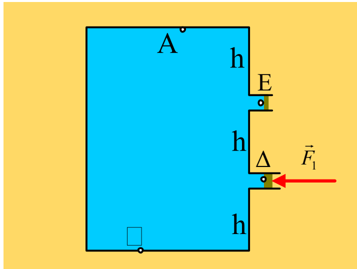
Κλειστό δοχείο με δύο έμβολα.



Το κυλινδρικό δοχείο του σχήματος είναι γεμάτο με νερό, το οποίο θεωρούμε ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό με πυκνότητα ρ=1.000kg/m^3. Το δοχείο έχει ύψος 3h=3m, είναι κλειστό, ενώ στην δεξιά του πλευρά έχουν προσαρμοσθεί δύο έμβολα, τα οποία μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές, στις θέσεις του σχήματος (το πρώτο απέχει κατά h από την πάνω βάση και το δεύτερο h από την κάτω). Το πάνω έμβολο είναι ελεύθερο να κινηθεί ενώ στο κάτω ασκούμε οριζόντια δύναμη F_1, με αποτέλεσμα το νερό να ισορροπεί, χωρίς να χύνεται. Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}$=10^{5}Pa, τα εμβαδά των εμβόλων Α=5cm^2 και g=10m/s^2.

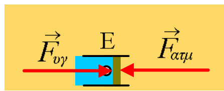
i) Να υπολογιστεί η πίεση στα σημεία Α και Β, στην πάνω και κάτω βάση του δοχείου.

ii) Αν η βάση του δοχείου έχει εμβαδόν A_1=0,4m^2, να υπολογιστούν οι δυνάμεις που το νερό ασκεί σε κάθε βάση του και η διαφορά τους. Τι μετράει η διαφορά αυτή;

iii) Να υπολογιστεί η απαραίτητη δύναμη που πρέπει να ασκούμε στο κάτω έμβολο για την παραπάνω ισορροπία.

iv) Αν αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F_1 στην τιμή $F_1΄$= 8N, να βρεθεί η απαραίτητη δύναμη F που πρέπει να ασκηθεί στο πάνω έμβολο για να διατηρηθεί η ισορροπία των εμβόλων.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο πάνω έμβολο, το οποίο και ισορροπεί. Έτσι από την ισορροπία του εμβόλου παίρνουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow F_{υγ}=F_{ατμ} \rightarrow p_E \cdot A=p_{ατμ} \cdot A \rightarrow$$

$$p_E=p_{ατμ}=10^5 Pa.$$

Αλλά για τη διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Α και Ε ισχύει:

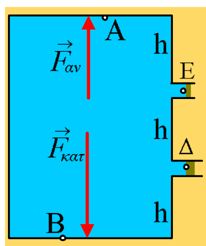
$$p_E - p_A=ρgh \rightarrow$$

$$p_A=p_E-ρgh= 10^5 Pa-1.000 \cdot 10 \cdot 1 Pa=0,9 \cdot 10^5 Pa$$

Όμοια για τα σημεία Ε και Β θα έχουμε:

$$p_B - p_E=ρg \cdot 2h \rightarrow$$

$$p_B=p_E+2ρgh=10^5 Pa + 2 \cdot 1.000 \cdot 10 \cdot 1 Pa=1,2 \cdot 10^5\ Pa$$

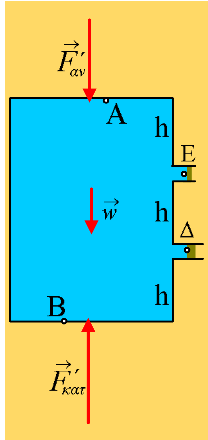


ii) Στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που το νερό ασκεί στις δύο βάσεις του δοχείου. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$F_{αν}=p_A \cdot A_1=0,9 \cdot 10^5 \cdot 0,4 N= 3,6 \cdot 10^4 N$

$F_{κατ}=p_B \cdot A_1= 1,2 \cdot 10^5 \cdot 0,4 N= 4,8 \cdot 10^4\ N$

Η διαφορά τους έχει μέτρο:



$$F_{κατ}-F_{αν}=(4,8-3,6)\cdot 10^4 N= 12.000\ N$$

Με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω.

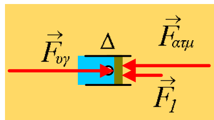
Η παραπάνω διαφορά έχει μέτρο όσο και το βάρος του νερού που περιέχεται στο δοχείο. Πράγματι στο νερό ασκούνται οι κατακόρυφες **αντιδράσεις** των $F_{αν}$ και $F_{κατ}$, από τις δύο βάσεις και το βάρος, όπως έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα (στο νερό ασκούνται και οριζόντιες δυνάμεις από την παράπλευρη επιφάνεια του δοχείου, αλλά η συνισταμένη τους είναι μηδενική). Από την ισορροπία του νερού παίρνουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow\ F'_{κατ} = F'_{αν} + w \rightarrow$$

$$w = F'_{κατ} - F'_{αν} = 12.000N$$

Άλλωστε το βάρος του νερού υπολογίζεται ίσο με:

$$w=mg=\rho\cdot V\cdot g=\rho\cdot A_1\cdot 3h\cdot g=1.000\cdot 0,4\cdot 3\cdot 10N=12.000N$$



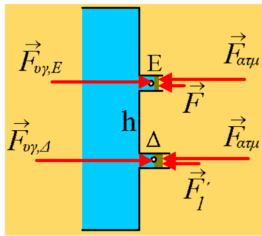
iii) Στο κάτω έμβολο, εκτός από τη δύναμη από την ατμόσφαιρα και από το υγρό, για την ισορροπία του εμβόλου, επιβάλλεται να ασκήσουμε και μια επιπλέον οριζόντια δύναμη F_1, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

$$ΣF=0 \rightarrow F_{υγ}=F_{ατμ}+F_1 \rightarrow F_1= p_Δ\cdot A-p_{ατμ}\cdot A \rightarrow$$

Όμως για την πίεση στην αριστερή πλευρά του πλαισίου (σημείο Δ, όπου λόγω μικρού εμβαδού θεωρούμε ότι έχουμε την ίδια πίεση σε κάθε σημείο) έχουμε:

$$p_Δ-p_E=\rho gh \rightarrow p_Δ=p_{ατμ}+\rho gh, \text{ οπότε}$$

$$F_1=(p_{ατμ}+\rho gh-p_{ατμ})\cdot A= \rho ghA=1.000\cdot 10\cdot 1\cdot 5\cdot 10^{-4}N=5\ N$$



iv) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις σ τα δύο έμβολα. Από την ισορροπία του κάτω εμβόλου παίρνουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow F_{υγ,Δ}=F_{ατμ}+F_1{}' \rightarrow p_Δ = p_{ατμ} + \frac{F_1{}'}{A} \quad (1)$$

Με την ίδια λογική, για το πάνω έμβολο, θα έχουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow F_{υγ,E}=F_{ατμ}+F \rightarrow p_E = p_{ατμ} + \frac{F}{A} \quad (2)$$

Ενώ οι πιέσεις στα σημεία Δ και Ε συνδέονται με την σχέση:

$$p_Δ-p_E=\rho gh \quad (3)$$

Με αφαίρεση των (1) και (2) και με τη βοήθεια της (3) παίρνουμε:

$$\rho gh = \frac{F_1{}'}{A} - \frac{F}{A} \rightarrow$$

$$F = F_1{}' - \rho ghA = 8N - 1.000 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-4}N = 3N$$

dmargaris@gmail.com