

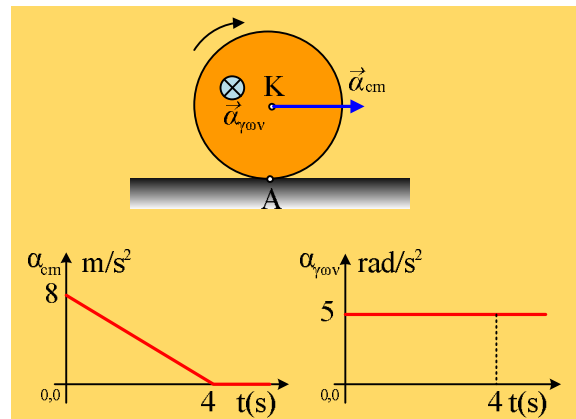
Η σύνθετη κίνηση ενός τροχού

Ένας τροχός ακτίνας $R=0,8m$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή $t_0=0$ τίθεται σε κίνηση αποκτώντας επιτάχυνση κέντρου μάζας K , όπως στο πρώτο από τα διπλανά διαγράμματα και γωνιακή επιτάχυνση, όπως στο δεύτερο διάγραμμα, με κατευθύνσεις όπως στο σχήμα.

Να βρεθούν η ταχύτητα και η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου επαφής του τροχού με το επίπεδο, σημείου A , τις χρονικές στιγμές:

- i) $t_1= 2s$, ii) $t_2= 4^+(s)$ και iii) $t_3= 5s$.

(η στιγμή $t_2=4^+s$ είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από τη στιγμή $4s$, οπότε έχει μηδενιστεί η επιτάχυνση του K .)



Απάντηση:

Θεωρούμε την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική με μεταβαλλόμενη επιτάχυνση του κέντρου μάζας K και μια στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (σταθερή γωνιακή επιτάχυνση), για την οποία ισχύει:

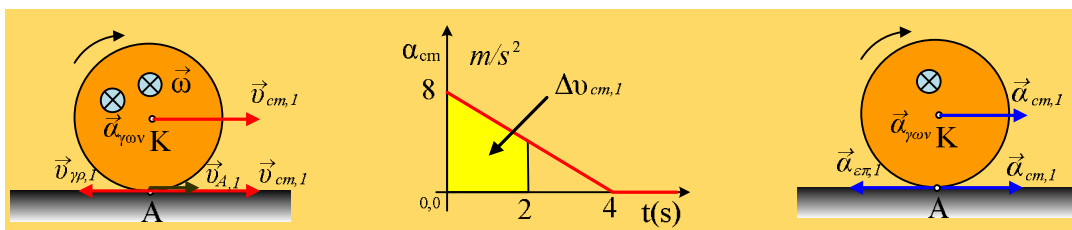
$$\omega = \alpha_{\gamma\omega} \cdot t$$

Με βάση αυτήν την θεώρηση, θα έχουμε:

- i) Τη χρονική στιγμή t_1 η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο:

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega} \cdot t_1 = 5 \cdot 2 \text{ rad/s} = 10 \text{ rad/s}$$

Ίδιας κατεύθυνσης με την γωνιακή επιτάχυνση, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα μέσα (ο τροχός στρέφεται δεξιόστροφα).



Εξάλλου το εμβαδόν του κίτρινου τραπεζιού στο διάγραμμα $a_{cm}-t$ (μεσαίο σχήμα) είναι αριθμητικά ίσο με την μεταβολή της ταχύτητας του κέντρου μάζας, όπου $a_{cm,1}=4m/s^2$ (γιατί;). Αλλά τότε τη στιγμή t_1 το κέντρο K του τροχού έχει ταχύτητα:

$$\Delta v_{cm} = v_{cm} - 0 \rightarrow v_{cm,1} = \frac{8+4}{2} 2m/s = 12m/s$$

Το σημείο A έχει λόγω μεταφορικής κίνησης ταχύτητα ίση με $v_{cm,1}$ και εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης την $v_{\gamma\rho,1} = \omega_1 R = 10 \cdot 0,8m/s = 8m/s$, με φορά προς τα αριστερά σχήμα (το πρώτο από τα παραπάνω σχήματα).

Έτσι η ταχύτητά του έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρο:

$$v_{A,1} = v_{cm,1} - v_{\gamma\pi,1} = 12 \text{ m/s} - 8 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

Στο τελευταίο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι αντίστοιχες εφαπτομενικές επιταχύνσεις του σημείου A (δεν έχει σχεδιαστεί η κεντρομόλος επιτάχυνση, εξαιτίας της κυκλικής κίνησης του σημείου γύρω από το κέντρο K...), όπου $a_{\epsilon\pi,1} = a_{\gamma\omega\pi} \cdot R = 5 \cdot 0,8 \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2$. Αλλά τότε η επιτάχυνση του σημείου είναι μηδενική, τη στιγμή t_1 .

ii) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 4^+ \text{ s}$, όπου έχει μηδενιστεί η επιτάχυνση του κέντρου K του τροχού, με βάση όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, θα έχουμε:

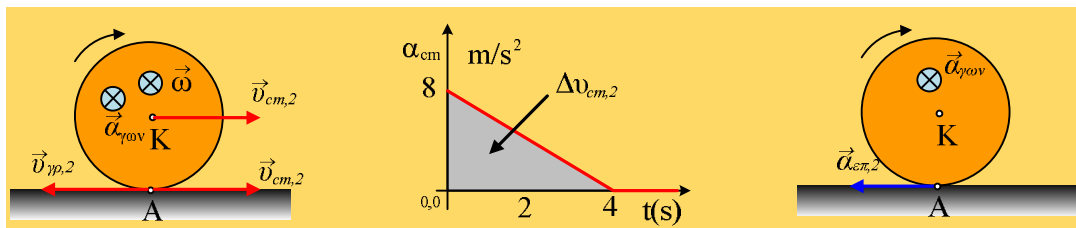
$$\omega_2 = a_{\gamma\omega\pi} t_2 = 5 \cdot 4 \text{ rad/s} = 20 \text{ rad/s} \text{ και}$$

$$v_{\gamma\pi,2} = \omega_2 R = 20 \cdot 0,8 \text{ m/s} = 16 \text{ m/s}.$$

Ενώ για την ταχύτητα του κέντρου K, ίση αριθμητικά με το εμβαδόν του γκρι τριγώνου στο μεσαίο σχήμα, οπότε

$$\Delta v_{cm,2} = v_{cm,2} - 0 \rightarrow v_{cm,2} = \frac{1}{2} 4 \cdot 8 \text{ m/s} = 16 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε με βάση και το πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, το σημείο επαφής του τροχού με το επίπεδο, σημείο A, έχει μηδενική ταχύτητα.



Όσον αφορά τις επιταχύνσεις του σημείου A, η μόνη εφαπτομενική επιτάχυνση είναι η επιτρόχια, όπως στο τρίτο σχήμα, με φορά προς τα αριστερά και μέτρο $a_{\epsilon\pi,2} = a_{\gamma\omega\pi} R = 4 \text{ m/s}^2$.

iii) Μετά τη στιγμή t_2 η μεταφορική κίνηση του τροχού δεν αλλάζει, άρα ο τροχός συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας $v_{cm} = 16 \text{ m/s}$, χωρίς επιτάχυνση, ενώ συνεχίζει να αυξάνεται η γωνιακή του ταχύτητα. Έτσι τη στιγμή $t_3 = 5 \text{ s}$, η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο:

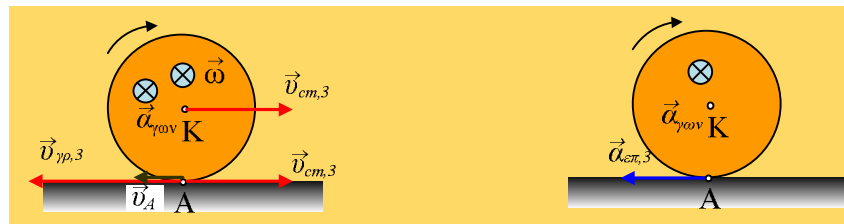
$$\omega_3 = a_{\gamma\omega\pi} \cdot t_3 = 5 \cdot 5 \text{ rad/s} = 25 \text{ rad/s}$$

Οπότε η γραμμική ταχύτητα του A έχει μέτρο:

$$v_{\gamma\pi,3} = \omega_3 \cdot R = 25 \cdot 0,8 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$$

Με βάση τώρα το πρώτο σχήμα, η ταχύτητα του σημείου A έχει φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$v_A = v_{\gamma\pi,3} - v_{cm} = 20 \text{ m/s} - 16 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$



ενώ συνεχίζει να έχει την ίδια επιτροχία επιτάχυνση, όπως στο δεύτερο σχήμα, μέτρου 4m/s^2 , όπως σε όλη τη διάρκεια της κίνησης.

dmargaris@gmail.com