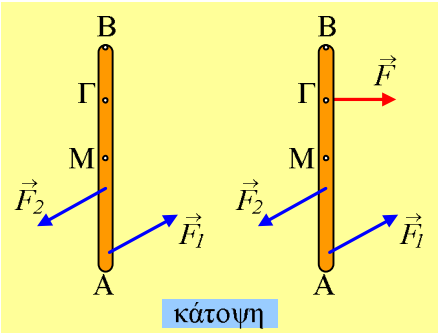
# *Η ράβδος και το ζεύγος δυνάμεων.*




Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ηρεμεί μια οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους ℓ=2m και μάζας 6kg, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το άκρο της Β. Στη ράβδο ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων, όπως στο σχήμα και μια οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$, μέτρου F=4N η οποία ασκείται κάθετα στη ράβδο στο σημείο Γ, όπου (ΒΓ)=0,5m.

i) Να σχεδιαστεί η δύναμη $\vec{F}$ και να υπολογιστεί η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

ii) Υποστηρίζεται η άποψη, ότι ένα στερεό στο οποίο ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων, δεν μπορεί να ισορροπεί με την άσκηση μιας μόνο επιπλέον δύναμης. Χρειάζεται να ασκηθεί ένα ακόμη ζεύγος δυνάμεων. Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη της πρότασης αυτής, χρησιμοποιώντας την παραπάνω ράβδο.

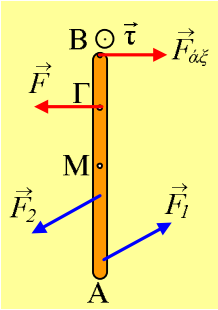
iii) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση (t=0) του άκρου Α της ράβδου, αν η δύναμη $\vec{F}$ έχει την κατεύθυνση του δεξιού σχήματος, κάθετη στη ράβδο, ενώ η ράβδος ΑΒ:

α) Μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα z, στο άκρο Β.

β) Έχει αποδεσμευτεί από τον άξονα αυτόν και είναι ελεύθερη.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Μ, $I_{cm}= m\ell^2/12$.

## *Απάντηση:*




i) Το ζεύγος των δύο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ παρουσιάζει, ως προς οποιοδήποτε σημείο, (άρα και ως προς το άκρο Β), ροπή τ, το διάνυσμα της οποίας είναι κατακόρυφο με φορά προς τα πάνω (αριστερόστροφη), όπως στο σχήμα. Αλλά αφού η ράβδος ισορροπεί, θα πρέπει η δύναμη $\vec{F}$ να παρουσιάζει δεξιόστροφη ροπή, ως προς το Β. Συνεπώς η δύναμη έχει την κατεύθυνση του σχήματος, προς τα αριστερά. Από την ισορροπία εξάλλου της ράβδου, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_B=0 \rightarrow \tau - F\cdot(B\Gamma) = 0 \rightarrow$$

$$\tau = F\cdot\frac{\ell}{4} = 4N\cdot\frac{2m}{4} = 2Nm$$

ii) Από την ισορροπία της ράβδου (εκτός της ισορροπίας των ροπών Στ=0) παίρνουμε για την οριζόντια διεύθυνση και:

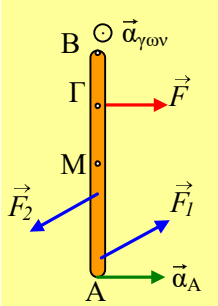
$$\Sigma F=0 \rightarrow \vec{F} + \vec{F}_{\alpha\xi} + \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = 0$$

Όπου $\vec{F}_{\alpha\xi}$ δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον κατακόρυφο άξονα z. Αλλά αφού $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, η παραπάνω σχέση μας δίνει:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\alpha\xi} = 0$$

Εξίσωση, η οποία μας λέει ότι έχουμε και ένα δεύτερο ζεύγος δυνάμεων ($\vec{F}$ *και* $\vec{F}_{\alpha\xi}$) που ασκείται στη ράβδο και όχι απλά τη δύναμη $\vec{F}$, μέσω του οποίου εξασφαλίζεται η ισορροπία. Με άλλα λόγια, δεν μπορεί με την επίδραση μόνο μιας δύναμης (εκτός του ζεύγους) να έχουμε ισορροπία, αφού η συνισταμένη δύναμη δεν θα ήταν μηδενική. Η πρόταση είναι σωστή.

iii) α) Αφού η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα z, ο οποίος περνά από το άκρο Β, θα έχουμε από το 2ο νόμο του Νεύτωνα, για την στροφική αυτή κίνηση:




$$\Sigma\tau_B = I_B \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau + F(B\Gamma) = I_B \alpha_{\gamma\omega\nu} \ (1)$$

Αλλά από το θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_B = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + \frac{1}{4} m\ell^2 = \frac{1}{3} m\ell^2$$

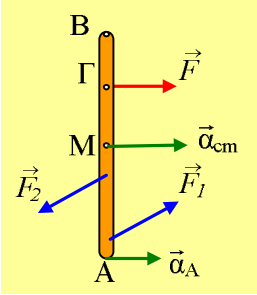
Οπότε από την (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\tau + F(B\Gamma)}{\frac{1}{3} m\ell^2} = \frac{2 + 4 \cdot 0{,}5}{\frac{1}{3} 6 \cdot 2^2} rad/s^2 = 0{,}5 rad/s^2.$$

Συνεπώς το άκρο Α, έχει επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell = 0{,}5 \cdot 2\ m/s^2 = 1 m/s^2.$$

β) Αν η ράβδος είναι ελεύθερη να κινηθεί, θα εκτελέσει κίνηση, την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ως σύνθετη, μια μεταφορική με επιτάχυνση $\alpha_{cm}$ και μια στροφική, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Μ της ράβδου. Για τη στιγμή t=0, που αφήνεται η ράβδος να κινηθεί, θα έχουμε:




Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow$

$$\alpha_{cm} = \frac{F}{m} = \frac{4}{6} m/s^2 = \frac{2}{3} m/s^2.$$

Με κατεύθυνση κάθετη προς τη ράβδο, ίδια με την δύναμη $\vec{F}$.

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow \tau - F(\Gamma M) = I_{cm} \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\tau - F(\Gamma M)}{\frac{1}{12} m\ell^2} = \frac{2 - 4 \cdot 0{,}5}{\frac{1}{12} 6 \cdot 2^2} rad/s^2 = 0$$

Αλλά τότε το άκρο Α τη στιγμή t=0, που αφήνεται να κινηθεί η ράβδος, θα έχει επιτάχυνση ίση με την

επιτάχυνση του κέντρου μάζας, όπως στο σχήμα, μέτρου

$$\alpha_A = \alpha_{cm} = \frac{2}{3} m/s^2.$$

***dmargaris@gmail.com***