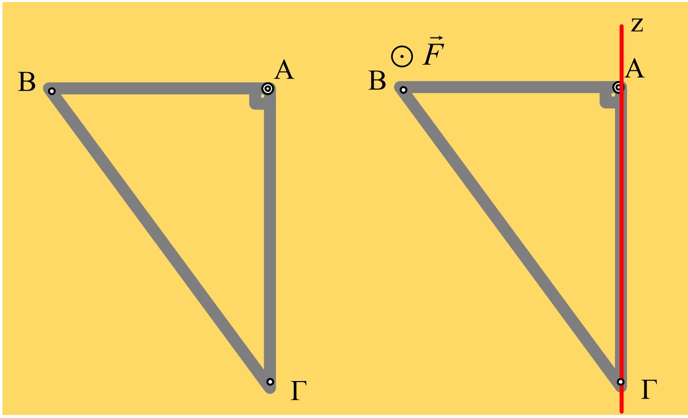
Η ροπή αδράνειας ενός τριγώνου



Στο σχήμα βλέπετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, οι πλευρές του οποίου έχουν προκύψει από την ίδια ομογενή λεπτή ράβδο, έχοντας μήκη (ΑΒ)= 3m, (ΑΓ)= 4m και (ΒΓ)= 5m. Το τρίγωνο έχει μάζα 24kg και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από την κορυφή Α, όπως στο πρώτο σχήμα, ενώ συγκρατείται σε τέτοια θέση, ώστε η πλευρά ΑΒ να είναι οριζόντια.

i) Να υπολογιστεί η μάζα κάθε ράβδου-πλευράς του τριγώνου.

ii) Αν η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της, δίνεται από την σχέση $I_{cm}= (m\ell^2/12)$, να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση της κορυφής Β, μόλις το τρίγωνο αφεθεί να περιστραφεί.

Στο δεύτερο σχήμα, το τρίγωνο μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος ταυτίζεται με την πλευρά ΑΓ.

iii) Ξεκινώντας από τον ορισμό της ροπής αδράνειας, μπορείτε να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ΒΓ ως προς τον άξονα z, συσχετίζοντάς την με την αντίστοιχη ροπή αδράνειάς της ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Γ;

iv) Πόση δύναμη, κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου και με σταθερό μέτρο, πρέπει να ασκηθεί στην κορυφή Β, ώστε το τρίγωνο να περιστραφεί κατά 120° σε χρόνο Δt=2s;

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

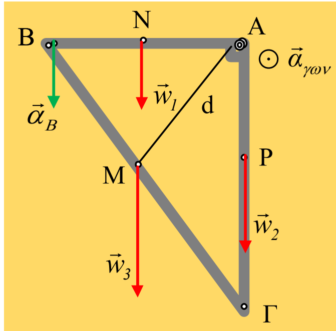
i) Έστω ρ η γραμμική πυκνότητα των ράβδων, που σχηματίζουν τις πλευρές του τριγώνου, όπου ρ=m/L, όπου L το μήκος των ράβδων. Έχει τιμή:

$$\rho = \frac{m}{L_{o\lambda}} = \frac{24}{3+4+5} kg/m = 2kg/m$$

Αλλά τότε η μάζα κάθε πλευράς- ράβδου είναι:

$$m_{AB} = m_1 = \rho(AB) = 2 \cdot 3kg = 6kg$$
$$m_{A\Gamma} = m_2 = \rho(A\Gamma) = 2 \cdot 4kg = 8kg$$
$$m_{B\Gamma} = m_3 = \rho(B\Gamma) = 2 \cdot 5kg = 10kg$$

ii) Η ροπή αδράνειας του τριγώνου, ως προς τον οριζόντιο άξονα στο Α, προκύπτει ως άθροισμα των ροπών αδράνειας των τριών ράβδων.



$$I_A = I_1 + I_2 + I_3 \rightarrow$$

$$I_A = \left(\frac{1}{12}m_1\ell_1^2 + m_1\frac{\ell_1^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{12}m_2\ell_2^2 + m_2\frac{\ell_2^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{12}m_3\ell_3^2 + m_3 d^2\right)$$

Αλλά d=(MA) = ½ (ΒΓ), αφού η διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$I_A = \frac{1}{3}m_1\ell_1^2 + \frac{1}{3}m_2\ell_2^2 + \frac{1}{3}m_3\ell_3^2 = \left(\frac{1}{3}6\cdot 3^2 + \frac{1}{3}8\cdot 4^2 + \frac{1}{3}10\cdot 5^2\right)kgm^2$$

$$I_A = 144\ kgm^2$$

Εφαρμόζουμε τώρα το 2° νόμο του Νεύτωνα για το στερεό, μόλις αφεθεί να περιστραφεί με την επίδραση των τριών βαρών (στο τρίγωνο ασκείται και μια δύναμη από τον άξονα περιστροφής στο Α, η οποία όμως δεν έχει ροπή ως προς τον άξονα και …δεν μας ενδιαφέρει):

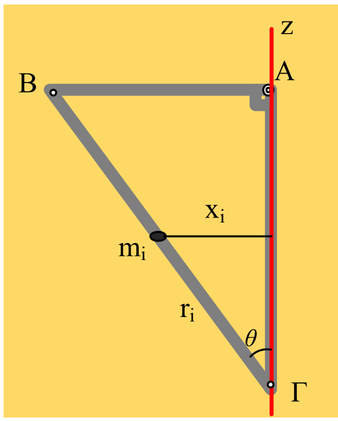
$$\Sigma\tau_A = I_A\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow m_1 g\cdot\frac{\ell_1}{2} + m_2 g\cdot 0 + m_3 g\cdot\frac{\ell_1}{2} = I_A\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{(m_1+m_3)g\cdot\ell_1}{2I_A} = \frac{(6+10)\cdot 10\cdot 3}{2\cdot 144}rad/s^2 = 5/3\ rad/s^2.$$

Συνεπώς η κορυφή Β έχει επιτρόχια επιτάχυνση, κάθετη στην ακτίνα ΑΒ, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$\alpha_B = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(AB) = \frac{5}{3}\cdot 3\ m/s^2 = 5\ m/s^2.$$

iii) Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας μιας ράβδου, όπως η ράβδος ΒΓ του σχήματος, ως προς κάθετο άξονα που περνά από το άκρο της Γ, δεν έχουμε παρά να χωρίσουμε τη ράβδο σε στοιχειώδεις μάζες $dm=m_i$ και να πάρουμε το άθροισμα (στην πραγματικότητα το ολοκλήρωμα…):



$$I_\Gamma = \sum_0^\nu m_i\cdot r_i^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_\nu r_\nu^2$$

Με την ίδια λογική η ροπή αδράνειας της ράβδου ΒΓ, ως προς τον άξονα z, ο οποίος ταυτίζεται με την πλευρά ΑΓ του τριγώνου, θα είναι ίση:

$$I_z = \sum_0^\nu m_i\cdot x_i^2 = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \ldots + m_\nu x_\nu^2 = m_1r_1^2\cdot\eta\mu^2\theta + m_2r_2^2\cdot\eta\mu^2\theta + \ldots + m_\nu r_\nu^2\cdot\eta\mu^2\theta \rightarrow$$

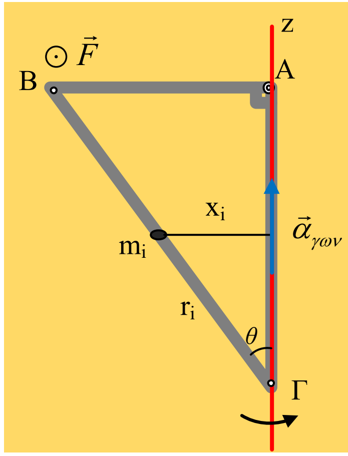
$$I_z = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_\nu r_\nu^2)\cdot\eta\mu^2\theta = I_\Gamma\cdot\eta\mu^2\theta \rightarrow$$

$$I_z = I_\Gamma\cdot\eta\mu^2\theta$$

$$I_z = \left(\frac{1}{12}m_3\ell_3^2 + m_3\frac{\ell_3^2}{4}\right)\cdot\eta\mu^2\theta = \frac{1}{3}m_3\ell_3^2\cdot\eta\mu^2\theta \rightarrow$$

$$I_z = \frac{1}{3} m_3 \ell_3^2 \cdot \eta\mu^2\theta = \frac{1}{3} 10 \cdot 5^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \ kgm^2 = 30 \ kgm^2 .$$

iv) Έστω ότι στην κορυφή Β ασκείται μια σταθερού μέτρου δύναμη F, η οποία είναι συνεχώς κάθετη στην ΑΒ. Τότε το τρίγωνο (το στερεό μας) θα αποκτήσει μια σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, με μέτρο που θα προκύπτει από το 2ο νόμο του Νεύτωνα:



$$\Sigma\tau_z = I_{Z,o\lambda} \cdot a_{\gamma\omega\nu,z} \rightarrow F \cdot \ell_1 = I_{Z,o\lambda} \cdot a_{\gamma\omega\nu,z} \quad (1)$$

Όπου για την ολική ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα z, ισχύει:

$$I_{z.o\lambda} = I_{AB} + I_{A\Gamma} + I_{B\Gamma} = \frac{1}{3} m_1 \ell_1^2 + 0 + I_z \Rightarrow$$

$$I_{z.o\lambda} = \frac{1}{3} m_1 \ell_1^2 + 0 + I_z = \frac{1}{3} 6 \cdot 3^2 kgm^2 + 30 kgm^2 = 48 kgm^2$$

Αλλά αφού το στερεό στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση η κίνησή του είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία ισχύουν:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu,z} \cdot t \quad \text{και} \quad \Delta\varphi = \tfrac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu,z} \cdot t^2$$

Με αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση, παίρνουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,z} = \frac{2 \cdot \Delta\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot {}^{2\pi}\!/_{3}}{2^2} \ rad/s^2 = {}^{\pi}\!/_{3} \ rad/s^2$$

Και με αντικατάσταση στην (1), την οποία επιλύουμε ως προς F παίρνουμε:

$$F = \frac{I_{Z,o\lambda} \cdot a_{\gamma\omega\nu,z}}{\ell_1} = \frac{48 \cdot {}^{\pi}\!/_{3}}{3} N = \frac{16\pi}{3} N \approx 16,8 N$$

dmargaris@gmail.com