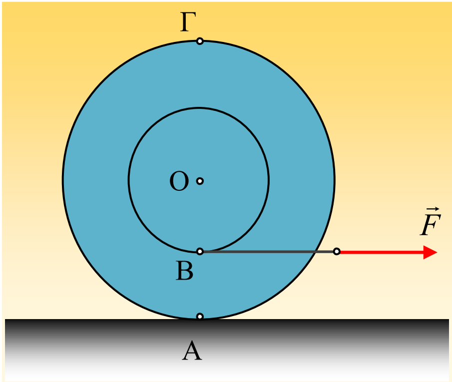
# *Δύο κινήσεις του ίδιου κυλίνδρου*




Ο κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα m=4kg και ακτίνα R και στο κεντρικό του τμήμα φέρει εγκοπή ακτίνας r=0,5R. Στην εγκοπή έχουμε τυλίξει ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άκρο του οποίου ασκούμε μια οριζόντια σταθερή δύναμη μέτρου F=16N. Στο σχήμα βλέπετε τρία σημεία Α, Β και Γ, όπου το Α είναι ένα σημείο επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο, το Β το σημείο όπου το νήμα έρχεται σε επαφή με το κύλινδρο και το Γ είναι αντιδιαμετρικό του σημείου Α.

i) Αν το επίπεδο είναι λείο:

α) Να βρεθούν οι αρχικές επιταχύνσεις των σημείων Α και Β.

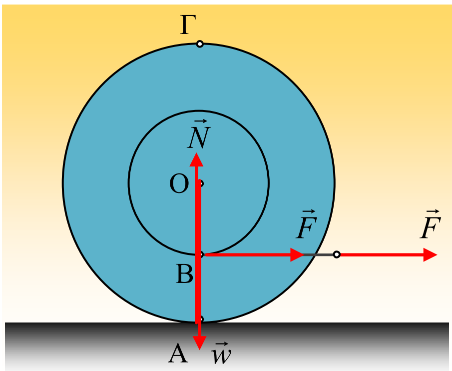
β) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των αντίστοιχων σημείων στις θέσεις των Α, Β και Γ τη χρονική στιγμή $t_1$=5s.

ii) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις αν ο κύλινδρος παρουσίαζε με το επίπεδο συντελεστή τριβής μ=0,2;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από τον άξονα περιστροφής του I= ½ mR$^2$ και g=10m/s$^2$.

### *Απάντηση:*

Θεωρούμε την κίνηση του κυλίνδρου ως σύνθετη μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο Ο του κυλίνδρου.



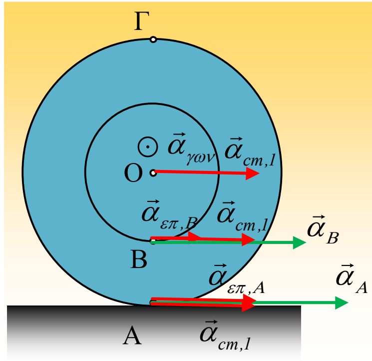

i) Αν το επίπεδο είναι λείο ασκεί στον κύλινδρο την κάθετη αντίδραση Ν, η οποία περνά από το κέντρο μάζας Ο, ενώ μέσω του νήματος, η δύναμη F μεταφέρεται και ασκείται στον κύλινδρο, στο σημείο Β, όπως στο σχήμα. Εφαρμόζουμε το 2$^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα, για μεταφορική και στροφική κίνηση:

$$\Sigma F = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm,1} = \frac{F}{m} = \frac{16}{4} m/s^2 = 4m/s^2$$

$$\Sigma\tau_o = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow F\cdot r = ½\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow$$

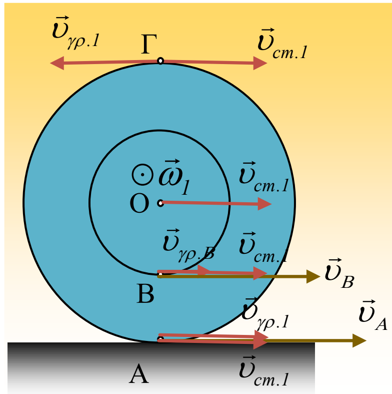
$$R\alpha_{\gamma\omega\nu,1}=\frac{F}{m}=\frac{16}{4}m/s^2=4m/s^2$$




α) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι αρχικές επιταχύνσεις των σημείων Α και Β, η $\alpha_{cm,1}$ λόγω μεταφορικής κίνησης και η επιτρόχια επιτάχυνση λόγω περιστροφής. Έτσι για τις συνολικές επιταχύνσεις των σημείων Α και Β έχουμε:

$$\alpha_A=\alpha_{cm,1}+\alpha_{\gamma\omega\nu,1}R=(4+4)m/s^2=8m/s^2$$

$$\alpha_B=\alpha_{cm,1}+\alpha_{\gamma\omega\nu,1}r=\alpha_{cm,1}+\alpha_{\gamma\omega\nu,1}\frac{R}{2}=(4+2)m/s^2=6m/s^2$$




β) Τη χρονική στιγμή $t_1$=5s το κέντρο μάζας του κυλίνδρου Ο, έχει αποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon_{cm,1}=\alpha_{cm,1}\cdot t_1=4\cdot 5\ m/s=20\ m/s$$

Ενώ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου είναι ίση:

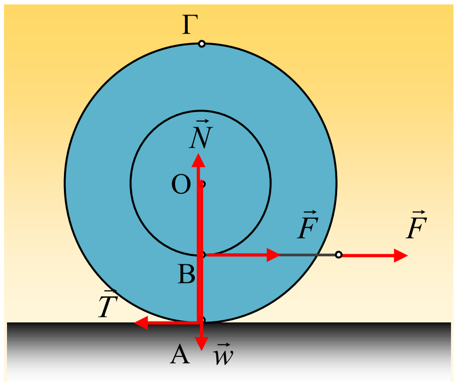
$$\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu,1}\cdot t_1=\frac{4}{R}\cdot t_1=\frac{4}{R}\cdot 5=\frac{20}{R}\quad (S.I.)$$

Οπότε για τις ταχύτητες των τριών σημείων (επαφής με το έδαφος, του αντιδιαμετρικού του και του σημείου επαφής του νήματος, με βάση και το διπλανό σχήμα, έχουμε:

$$\upsilon_A=\upsilon_{cm,1}+\omega_1 R=\left(20+\frac{20}{R}R\right)m/s=40m/s$$

$$\upsilon_B=\upsilon_{cm,1}+\omega_1 r=\left(20+\frac{20}{R}\cdot\frac{R}{2}\right)m/s=30m/s$$

$$\upsilon_\Gamma=\upsilon_{cm,1}-\omega_1 R=\left(20-\frac{20}{R}R\right)m/s=0$$




ii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα το σημείο Α αποκτά ταχύτητα προς τα δεξιά. Αλλά τότε αν το επίπεδο δεν είναι λείο, θα εμφανιστεί δύναμη τριβής με φορά προς τα αριστερά, όπως στο διπλανό σχήμα. Εφαρμόζουμε ξανά το 2° νόμο του Νεύτωνα, για μεταφορική και στροφική κίνηση, θεωρώντας ότι ο κύλινδρος μεταφέρεται προς τα δεξιά και στρέφεται δεξιόστροφα, με αποτέλεσμα να κυλίεται (χωρίς να υπάρχει ολίσθηση):

$$\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm}\rightarrow F-T=m\cdot\alpha_{cm,2}\quad(1)$$

$$\Sigma\tau_O=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,2}\rightarrow T\cdot R-F\cdot r=\tfrac{1}{2}mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,2}\rightarrow T-\frac{F}{2}=\frac{1}{2}m\cdot R\alpha_{\gamma\omega\nu,2}\quad(2)$$

Ενώ θεωρώντας ότι ο κύλινδρος κυλίεται, ισχύει ακόμη $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ (3) και με αντικατάσταση στην εξίσωση (2) και πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{F}{2}=\frac{3}{2}m\cdot a_{cm,2}\rightarrow a_{cm,2}=\frac{F}{3m}=\frac{16}{3\cdot 4}m/s^2=\frac{4}{3}m/s^2$$

Ελέγχουμε αν η υπόθεσή μας για κύλιση ευσταθεί. Από την (1) βρίσκουμε:

$$T=F-m\alpha_{cm,2}=16N-4\cdot(4/3)N=(32/3)\,N$$

Όμως η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, θεωρώντας την ίση με την τριβή ολίσθησης έχει μέτρο:

$$T=\mu N=\mu mg=0{,}2\cdot 4\cdot 10N=8N.$$

Πράγμα που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε κύλιση και ο κύλινδρος ολισθαίνει.

Και επιστρέφοντας στις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm}\rightarrow F-T=m\cdot\alpha_{cm,2}\quad(1)$$

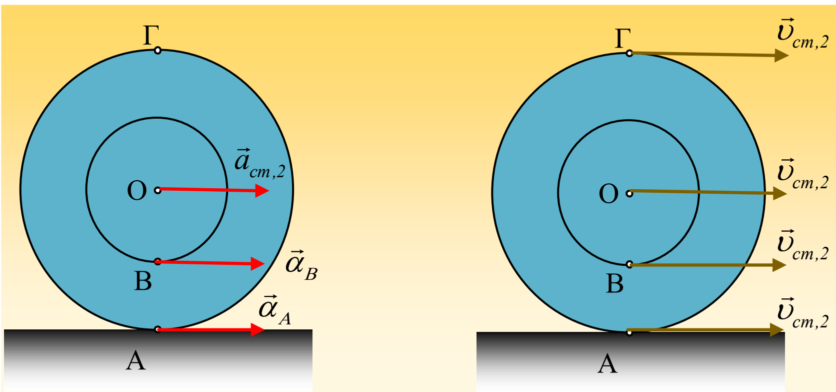
$$\Sigma\tau_O=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,2}\rightarrow T\cdot R-F\cdot r=½\,mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,2}\rightarrow T-\frac{F}{2}=\frac{1}{2}m\cdot Ra_{\gamma\omega\nu,2}\quad(2)$$

$$a_{cm,2}=\frac{F-T}{m}=\frac{16-8}{4}m/s^2=2m/s^2.$$

$$a_{\gamma\omega\nu,2}=\frac{2T-F}{mR}=0$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας οδηγούν σε μια μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου.

α) Αφού έχουμε μεταφορική κίνηση, όλα τα σημεία του κυλίνδρου έχουν την ίδια επιτάχυνση, ίση με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας $\alpha_A=\alpha_B=\alpha_{cm,2}=2m/s^2$.




β) Τη στιγμή $t_1$ το κέντρο μάζας του κυλίνδρου έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_{cm,2}=\alpha_{cm,2}\cdot t_1=2\cdot 5m/s=10m/s$$

Και την ίδια ταχύτητα έχουν και όλα τα σημεία του κυλίνδρου αφού έχουμε μόνο μεταφορική κίνηση, με κατευθύνσεις όπως στο 2ο σχήμα παραπάνω.

**dmargaris@gmail.com**