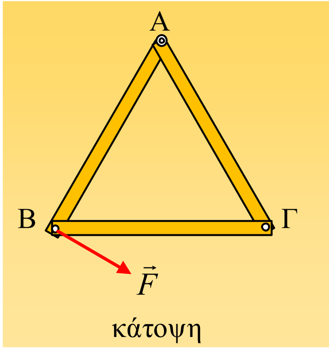
Ένα τρίγωνο και η ροπή αδράνειάς του

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα στερεό s, το οποίο έχει σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου, αποτελούμενο από τρεις ίδιες ομογενείς λεπτές ράβδους, μήκους ℓ=1m και μάζας m=2kg η καθεμιά. Το στερεό μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από την κορυφή Α του τριγώνου. Σε μια στιγμή t_0=0 ασκούμε στην κορυφή Β δύναμη σταθερού μέτρου F=1,5π (N), η οποία είναι διαρκώς κάθετη στην πλευρά ΑΒ, όπως στο σχήμα. Το στερεό εκτελεί 4,5 περιστροφές μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=6s.



i) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του τριγώνου, καθώς και η επιτάχυνση της κορυφής Β που έχει την κατεύθυνση της ασκούμενης δύναμης F.

ii) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση της κορυφής Β που είναι κάθετη στην δύναμη F, τη χρονική στιγμή t_1.

iii) Πόση είναι η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής z;

iv) Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ΑΒ ως προς τον άξονα z δίνεται από την σχέση $I_{AB}=\lambda\cdot m\ell^2$, να βρεθεί η σταθερά αναλογίας λ.

Απάντηση:

i) Η ασκούμενη ροπή που επιταχύνει το στερεό, είναι η ροπή της δύναμης $\tau_z=F\cdot\ell$, η οποία παραμένει σταθερή. Αλλά τότε η κίνηση είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

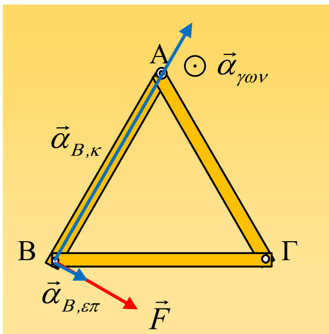
$$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}t \quad (1) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \quad (2)$$

Από την (2) παίρνουμε:

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \quad \to \alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{2\theta}{t^2}=\frac{2\cdot 4,5\cdot 2\pi}{6^2}rad/s^2=\frac{\pi}{2}rad/s^2.$$

Αλλά τότε η κορυφή Β έχει επιτρόχια επιτάχυνση, ίδιας κατεύθυνσης με την ασκούμενη δύναμη F, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$\alpha_{B,\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell={}^{\pi}\!/_{2}\cdot 1\,m/s^2={}^{\pi}\!/_{2}\;m/s^2=1,57m/s^2.$$



ii) Τη χρονική στιγμή t_1 το στερεό s έχει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1=\frac{\pi}{2}\cdot 6rad/s=3\pi\ rad/s.$$

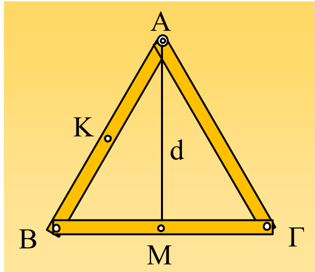
Οπότε το σημείο Β έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το κέντρο Α και μέτρο:

$$\alpha_{B,\kappa}=\frac{\upsilon_B^2}{R}=\omega_1^2\ell=(3\pi)^2\cdot 1\,m/s^2=90m/s^2.$$

iii) Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή του στερεού, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_A = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$F\cdot\ell = I_A\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow I_A = \frac{F\cdot\ell}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{1{,}5\pi\cdot 1}{\pi/2}kgm^2 = 3kgm^2.$$



iv) Για την ροπή αδράνειας του στερεού s, ισχύει:

$$I_A = I_{A,(AB)} + I_{A,(B\Gamma)} + I_{A,(\Gamma A)} = 2\cdot I_{A,(AB)} + I_{A,(B\Gamma)} \quad (3)$$

Αλλά από το θεώρημα Steiner για την ράβδο ΑΒ, παίρνουμε:

$$I_{A,(AB)} = I_{cm,K} + m\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I_{cm,K} = \lambda m\ell^2 - m\frac{\ell^2}{4} = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)m\ell^2.$$

Από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΜ, παίρνουμε:

$$d = \sqrt{(AB)^2 - (BM)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}$$

οπότε για την ροπή αδράνειας της ράβδου ΒΓ ως προς τον άξονα στο Α, παίρνουμε:

$$I_{A,(B\Gamma)} = I_{cm,M} + md^2 = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)m\ell^2 + m\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)m\ell^2.$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (3) θα έχουμε:

$$I_A = 2\lambda m\ell^2 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)m\ell^2 \rightarrow$$

$$3 = 2\lambda\cdot 2\cdot 1^2 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)2\cdot 1^2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

dmargaris@gmail.com