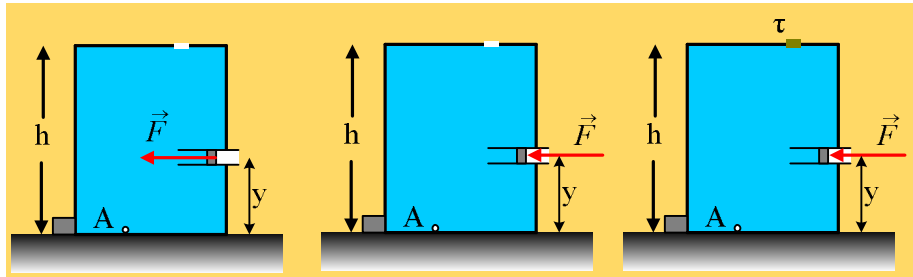


Μεταβάλλοντας την δύναμη στο έμβολο

Ένα κυλινδρικό δοχείο είναι γεμάτο με νερό, ενώ στην άνω βάση του υπάρχει μια μικρή τρύπα με άνοιγμα $A_1=5\text{cm}^2$. Το ύψος του δοχείου είναι $h=1\text{m}$, ενώ σε απόσταση $y=0,4\text{m}$ από την βάση του, υπάρχει άνοιγμα στο οποίο έχει συνδεθεί ένα έμβολο εμβαδού $A_2=10\text{cm}^2$. Το έμβολο, μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και για να παραμένει ακίνητο, του ασκούμε μια οριζόντια δύναμη F , όπως στο πρώτο σχήμα (πολλές φορές σχεδιάζουμε τη δύναμη όπως στο μεσαίο σχήμα...),

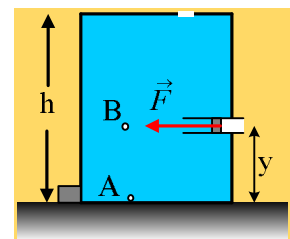


- i) Θεωρώντας το νερό ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό και το ύψος του εμβόλου αμελητέο σε σχέση με το ύψος του δοχείου, να βρείτε το μέτρο της ασκούμενης στο έμβολο δύναμης F , καθώς και την πίεση στο σημείο A του πυθμένα του δοχείου.
 - ii) Ένας συμμαθητής σας υποστηρίζει ότι αν αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης, στην σταθερή τιμή $F_1=8\text{N}$, μπορούμε να φέρουμε το έμβολο σε μια νέα θέση αριστερότερα της αρχικής, όπου να ισορροπεί. Να εξετάσετε αν αυτό είναι σωστό ή όχι.
 - iii) Κλείνουμε την τρύπα με μια τάπα (αμελητέου βάρους), προσέχοντας να μην παραμείνει αέρας μέσα στο δοχείο, ενώ ασκούμε διαρκώς τη δύναμη F στο έμβολο. Στη συνέχεια αφήνουμε ελεύθερο το έμβολο, παύοντας να του ασκούμε δύναμη.
 - α) Θα μετακινηθεί ή όχι το έμβολο από την αρχική του θέση;
 - β) Να υπολογιστεί η πίεση στον πυθμένα (σημείο A) καθώς και η δύναμη που το νερό ασκεί στην τάπα.
 - iv) Αν η μέγιστη δύναμη στατικής τριβής μεταξύ τάπας και τοιχώματος (η οποία διατηρεί την τάπα στη θέση της) έχει μέτρο 10N , πόση δύναμη πρέπει να ασκήσουμε στο έμβολο, ώστε να βγάλουμε την τάπα;
- Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at}=10^5\text{Pa}$, η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000\text{kg/m}^3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

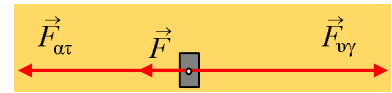
Απάντηση:

- i) Θεωρώντας μικρό το ύψος του εμβόλου, ουσιαστικά δεχόμαστε ότι έχουμε την ίδια πίεση, σε όλα τα σημεία του εμβόλου, ίση με την πίεση στο σημείο B, του σχήματος, σε βάθος $h'=h-y$, μέσα στο νερό, όπου στην πάνω επιφάνειά του υπάρχει ατμόσφαιρα. Αλλά τότε η πίεση στο σημείο B είναι ίση:

$$p_B = p_{at} + \rho g h' = p_{at} + \rho g (h-y)$$



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο, όπου F_{at} η δύναμη από την ατμόσφαιρα και F_{vy} η δύναμη από το υγρό. Από την ισορροπία του εμβόλου παίρνουμε:



$$\begin{aligned}\Sigma F=0 &\rightarrow F_{vy}=F_{at}+F \rightarrow p_B \cdot A_2 = p_{at} \cdot A_2 + F \rightarrow \\ F &= (p_B - p_{at}) \cdot A_2 = (p_{at} + \rho g(h-y) - p_{at}) \cdot A_2 = \rho g(h-y) \cdot A_2 \rightarrow \\ F &= 1.000 \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} N = 6 N\end{aligned}$$

Ενώ η πίεση στον πυθμένα του δοχείου έχει τιμή:

$$p_A = p_{at} + \rho gh = 10^5 Pa + 1.000 \cdot 10 \cdot 1 Pa = 110.000 Pa.$$

- ii) Η άποψη του συμμαθητή σας είναι λανθασμένη. Αν αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F , πράγματι μπορούμε να μετακινήσουμε το έμβολο προς τα αριστερά, οπότε κάποια ποσότητα νερού θα χυθεί, μέσα από την τρύπα στην άνω βάση, οπότε η πίεση στο σημείο B θα παραμείνει στην αρχική της τιμή, οπότε αν θέλουμε να σταματήσει το έμβολο να κινείται θα πρέπει να του ασκήσουμε και πάλι δύναμη μέτρου 6N, αφού μόνο αυτή η δύναμη εξασφαλίζει την ισορροπία του εμβόλου.
- iii) Κλείνοντας την τρύπα με την τάπα, στην πραγματικότητα απομονώνουμε το υγρό από την ατμόσφαιρα που υπάρχει πάνω από το δοχείο.

α) Ας **υποθέσουμε** ότι αφήνοντας το έμβολο ελεύθερο, αυτό θα κινηθεί προς τα δεξιά (πράγμα που μπορεί να οδηγήσει σύντομα και σε εκροή του νερού από το δοχείο...). Αλλά για να συμβεί αυτό θα πρέπει να κατέβη η πάνω επιφάνεια του νερού, οπότε δεν θα εφάπτεται πια με την άνω βάση του δοχείου και έτσι θα έχουμε μια περιοχή κενού με μηδενική πίεση (ας μην ασχοληθούμε εδώ με τάση ατμών...).

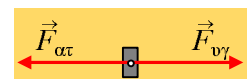
Αλλά τότε η πίεση στο σημείο B θα είναι ίση με $p_B = \rho g(h-y)$, με αποτέλεσμα η δύναμη από το υγρό στο έμβολο F_{vy} , να έχει μέτρο $F_{vy} = p_{vy} \cdot A_2 = \rho g(h-y) \cdot A_2 = 6 N$, ενώ η δύναμη από την ατμόσφαιρα θα έχει μέτρο:



$$F_{at} = p_{at} \cdot A_2 = 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} N = 100 N$$

Αλλά με τις δυνάμεις αυτές προφανώς το έμβολο δεν θα μετακινηθεί προς τα δεξιά, ούτε πρόκειται να έχουμε καμιά εκροή νερού... Η υπόθεσή μας, μας οδήγησε σε άτοπο!

- β) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, το έμβολο συνεχίζει να ισορροπεί, οπότε από την ισορροπία του εμβόλου παίρνουμε:



$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{vy}=F_{at} \rightarrow p_B \cdot A_2 = p_{at} \cdot A_2 \rightarrow p_B=p_{at}$$

Αλλά τότε για την διαφορά πίεσης μεταξύ δύο σημείων του υγρού σε ισορροπία, έχουμε:

$$\begin{aligned}p_A - p_B &= \rho gy \rightarrow p_A = p_B + \rho gy \rightarrow \\ p_A &= 10^5 Pa + 1.000 \cdot 10 \cdot 0,4 Pa = 104.000 Pa\end{aligned}$$

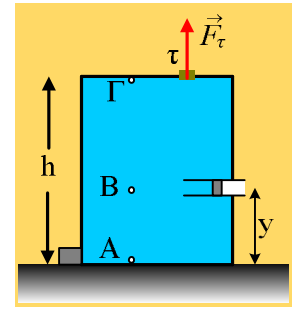
Με την ίδια λογική, για ένα σημείο Γ στην πάνω βάση του δοχείου, θα έχουμε:

$$p_B - p_\Gamma = \rho gh' \rightarrow p_\Gamma = p_B - \rho gh' \rightarrow$$

$$p_{\Gamma} = 10^5 \text{ Pa} - 1.000 \cdot 10 \cdot 0,6 \text{ Pa} = 94.000 \text{ Pa}$$

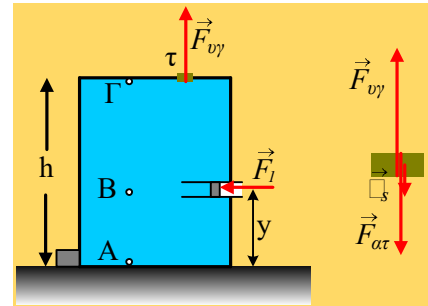
Αυτή η τιμή πίεσης, επικρατεί και σε όλα τα σημεία της κάτω επιφάνειας της τάπας, με αποτέλεσμα το νερό να ασκεί στην τάπα, κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$F_{\tau} = p_{\Gamma} \cdot A_1 = 94.000 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ N} = 47 \text{ N}$$



- iv) Αρχίζοντας να πιέζουμε το έμβολο, ασκώντας του την οριζόντια δύναμη F , αυξάνουμε την πίεση στο σημείο B, πράγμα που σημαίνει ότι αυξάνεται και η πίεση στην κάτω πλευρά της τάπας, οπότε αυξάνεται και η δύναμη F_{vy} που το νερό ασκεί στην τάπα, με φορά προς τα πάνω, τείνοντας να την βγάλει από την θέση της. Έστω λοιπόν ότι η τάπα είναι έτοιμη οριακά να κινηθεί προς τα πάνω, ενώ ακόμη ισορροπεί, όταν ασκούμε στο έμβολο μια δύναμη μέτρου F_1 . Τότε ασκείται πάνω της η μέγιστη δυνατή τριβή με τιμή:

$$T = T_{s,max} = T_{op} = 10 \text{ N}.$$



Από την ισορροπία της τάπας παίρνουμε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_{vy} - T_{op} - F_{at} = 0 \rightarrow F_{vy} = F_{at} + T_{op} \rightarrow$$

$$\frac{F_{vy}}{A_1} = \frac{F_{at}}{A_1} + \frac{T_{op}}{A_1} \rightarrow p_{\Gamma} = p_{at} + \frac{T_{op}}{A_1} \rightarrow$$

$$p_{\Gamma} = p_{at} + \frac{T_{op}}{A_1} = 10^5 \text{ Pa} + \frac{10}{5 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Αλλά για τις πιέσεις μεταξύ των σημείων της κάτω επιφάνειας της τάπας και των σημείων της αριστερής πλευράς του εμβόλου, ισχύει:

$$p_B - p_{\Gamma} = \rho g(h-y) \rightarrow p_B = p_{\Gamma} + \rho g(h-y) \rightarrow$$

$$p_B = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa} + 1.000 \cdot 10 \cdot 0,6 \text{ Pa} = 1,26 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Τέλος από την ισορροπία του εμβόλου παίρνουμε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_{vy} = F_{at} + F_1 \rightarrow p_B \cdot A_2 = p_{at} \cdot A_2 + F_1 \rightarrow$$

$$F_1 = (p_B - p_{at}) \cdot A_2 = (1,26 - 1) \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ N} = 26 \text{ N}$$

Η παραπάνω τιμή $F_1 = 26 \text{ N}$ είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ασκούμενη δύναμη και να έχουμε οριακά ισορροπία. Για κάθε δύναμη μεγαλύτερη από 26 N , η τάπα θα βγει. Άρα οριακά και για ασκούμενη δύναμη 26 N , η τάπα βγαίνει!

Σχόλιο:

Αν το τελευταίο σας φαίνεται... περίεργο, δεν έχετε παρά να σκεφτείτε τι θα γίνει αν η δύναμη πάρει την τιμή $F_1 = 26,000001 \text{ N}$...

dmargaris@gmail.com