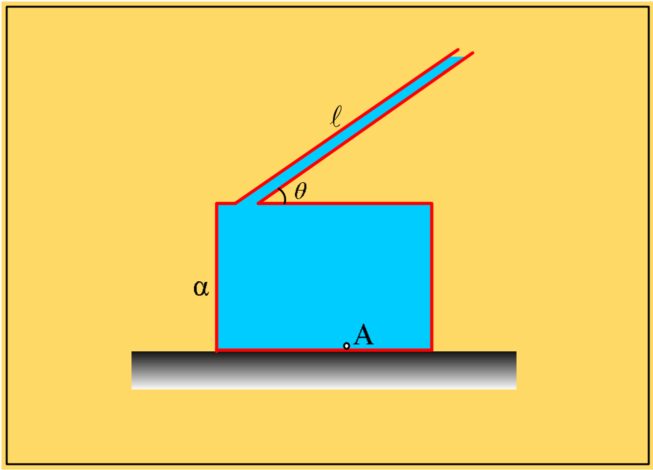
Η πίεση και η δύναμη σε δοχείο με νερό



Το κυλινδρικό κλειστό δοχείο του σχήματος, ύψους α, είναι γεμάτο με νερό και συνδέεται με λεπτό σωλήνα, ο οποίος περιέχει επίσης νερό σε μήκος ℓ=2α και ο οποίος σχηματίζει γωνία θ=30° με την οριζόντια διεύθυνση.

i) Η πίεση στη βάση του δοχείου (σημείο Α) έχει τιμή:

α) $p_A=p_{ατ}+3ρgα$, β) $p_A=p_{ατ}+2ρgα$,

γ) $p_A=p_{ατ}+ρgα$, δ) $p_A=2ρgα$,

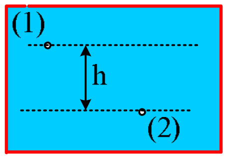
ii) Η δύναμη που το νερό ασκεί στην άνω βάση του δοχείου, η οποία έχει εμβαδόν Α, έχει μέτρο:

α) $F=(p_{ατ}+2ρgα)\cdot A$, β) $F=(p_{ατ}-2ρgα)\cdot A$, γ) $F=(p_{ατ}+ρgα)\cdot A$, δ) $F=ρgα\cdot A$.

iii) Αν F_1 η δύναμη που ασκεί στο νερό η άνω βάση του δοχείου και F_2 η αντίστοιχη που ασκεί η κάτω βάση, να αποδείξετε ότι $F_2-F_1=w$, όπου w το βάρος του νερού που περιέχεται στο δοχείο.

Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας.

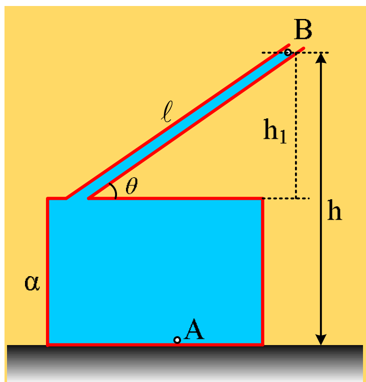
Απάντηση:



Η διαφορά πίεσης μεταξύ δύο σημείων ενός υγρού, δεν εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου, αλλά από την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων. Ισχύει δηλαδή:

$$p_2-p_1=ρgh$$

όπου h η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων (1) και (2).



i) Αν πάρουμε ένα σημείο Β στην επιφάνεια του νερού στο σωλήνα και το σημείο Α, για την διαφορά πίεσης ισχύει:

$$p_A-p_B=ρgh \rightarrow$$

$$p_A-p_{ατ}=ρg(h_1+α) \rightarrow$$

$$p_A=p_{ατμ}+ρg(ℓ\cdot ημθ+α)= p_{ατμ}+ρg(2α\cdot ημθ+α)\rightarrow$$

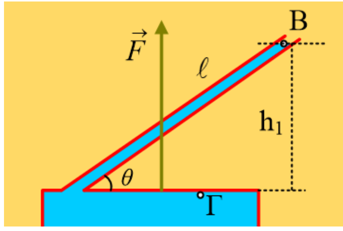
$$p_A=p_{ατ}+2ρgα$$

Σωστή η β) πρόταση.

ii) Με την ίδια λογική, αν πάρουμε ένα σημείο του υγρού Γ, σε επαφή με την πάνω βάση του δοχείου, θα έχουμε:

$$p_Γ-p_B=ρgh_1 \rightarrow p_Γ-p_{ατ}=ρgh_1 \rightarrow$$

$$p_Γ=p_{ατμ}+ρg\cdot ℓ\cdot ημθ= p_{ατμ}+ρgα\rightarrow$$

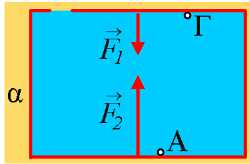


Η πίεση αυτή είναι σταθερή για όλα τα σημεία της επιφάνειας, με αποτέλεσμα να ασκείται στην επιφάνεια κατακόρυφη δύναμη, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$F = p_\Gamma \cdot A = (p_{\alpha\tau\mu} + \rho g \alpha) \cdot A$$

Σωστό το γ).

iii) Παραπάνω υπολογίσαμε τη δύναμη F που το νερό ασκεί στην άνω βάση του δοχείου. Η αντίδρασή της F_1 ασκείται στο νερό από το τοίχωμα της άνω βάσης, έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο επίσης:



$$F_1 = (p_{\alpha\tau\mu} + \rho g \alpha) \cdot A$$

Αλλά με τον ίδιο τρόπο, το νερό ασκεί στην κάτω βάση, δύναμη με φορά προς τα κάτω, με μέτρο:

$$F' = p_A \cdot A = (p_{\alpha\tau} + 2\rho g \alpha) \cdot A$$

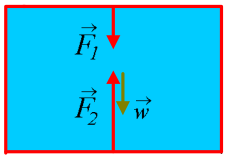
Η αντίδρασή της, η δύναμη F_2, έχει το ίδιο μέτρο και φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

Με βάση τις παραπάνω τιμές βρίσκουμε:

$$F_2 - F_1 = (p_{\alpha\tau} + 2\rho g \alpha) \cdot A - (p_{\alpha\tau\mu} + \rho g \alpha) \cdot A = \rho g \alpha \cdot A = \rho = \rho g \cdot V = mg = w$$

Αφού αA=V ο όγκος του δοχείου και ρV η μάζα του νερού που περιέχεται στο δοχείο.

Σχόλιο:



Στο τελευταίο ερώτημα, κάποιος θα μπορούσε να αφήσει στην άκρη τα μέτρα των δυνάμεων F_1 και F_2 και να μιλήσει απλά για την ισορροπία της μάζας του νερού που περιέχεται στο δοχείο, σχεδιάζοντας τις δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα. Η συνθήκη ισορροπίας μας δίνει:

$$\Sigma F = 0 \;\rightarrow F_2 - F_1 - w = 0 \;\rightarrow$$

$$F_2 - F_1 = w$$

Αφού οι δυνάμεις στα πλευρικά τοιχώματα, ως κάθετες στις επιφάνειες, είναι οριζόντιες και αλληλοεξουδετερώνονται.

dmargaris@gmail.com