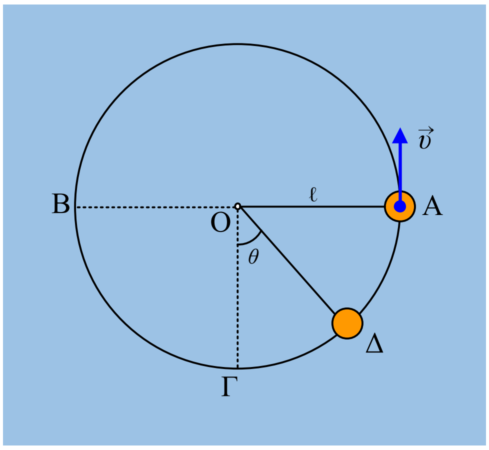
Η ορμή και οι μεταβολές της

Μια σφαίρα μάζας m=2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένη στο άκρο νήματος μήκους ℓ=0,8m, διαγράφοντας κυκλική τροχιά κέντρου Ο, με γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου υ=0,6m/s (το σχήμα σε κάτοψη).



i) Να βρεθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής (διεύθυνση, φορά και μέτρο) της σφαίρας στη θέση Α.

ii) Σε πόσο χρόνο η σφαίρα θα φτάσει για πρώτη φορά στη θέση Β, αντιδιαμετρική της θέσης Α; Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

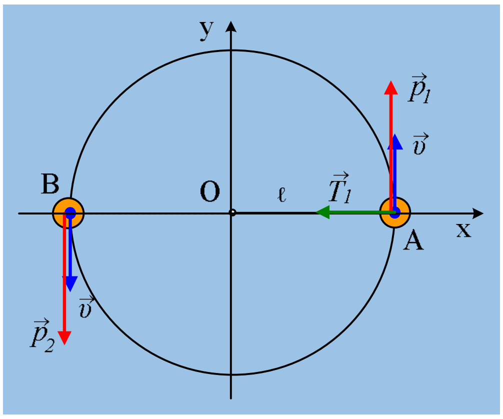
iii) Μετά από λίγο η μπάλα φτάνει στη θέση Γ, όπου η ακτίνα ΟΓ είναι κάθετη στη διάμετρο ΑΒ. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας μεταξύ των θέσεων Β και Γ.

iv) Να βρεθεί τέλος η μεταβολή της ορμής της σφαίρας, μεταξύ των θέσεων Γ και Δ, αν δίνεται για τη γωνία θ του σχήματος ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

Απάντηση:

i) Καθώς η σφαίρα περνά από τη θέση Α, έχει ταχύτητα εφαπτόμενη στη τροχιά, οπότε την ίδια κατεύθυνση έχει και η ορμή της σφαίρας p_1, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για το μέτρο της ορμής έχουμε:

$$p_1=m\cdot\upsilon=2\cdot 0,6\ kg\cdot m/s=1,2kg\cdot m/s$$



Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα. Αλλά στην περίπτωση της παραπάνω οριζόντιας κυκλικής κίνησης, η συνισταμένη δύναμη είναι η τάση του νήματος, η οποία είναι **και** η κεντρομόλος δύναμη που δρα στη σφαίρα. Έτσι το διάνυσμα $\frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t}$ στη θέση Α, έχει τη διεύθυνση της ακτίνας (ας την ορίσουμε ως διεύθυνση x, παίρνοντας τους άξονες x και y, όπως στο σχήμα), με φορά προς το κέντρο Ο της τροχιάς, με μέτρο:

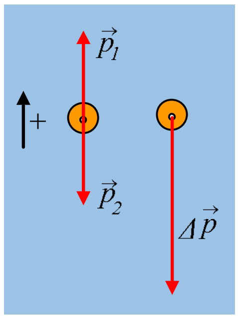
$$\left|\frac{\Delta p}{\Delta t}\right| = |\Sigma F| = |T| = m\frac{\upsilon^2}{R} = 2\cdot\frac{0,6^2}{0,8}kg\cdot m/s^2 = 0,9kg\cdot m/s^2.$$

ii) Το μήκος του τόξου που διατρέχει η σφαίρα συνδέεται με το μέτρο της ταχύτητας με τη σχέση:

$$\upsilon = \frac{s}{t}$$

Λύνοντας ως προς t για μήκος τόξου s= ½ 2πR=πR θα έχουμε:

$$t=\frac{s}{\upsilon}=\frac{\pi R}{\upsilon}=\frac{\pi\cdot 0{,}8}{0{,}6}s\approx 4{,}2s$$



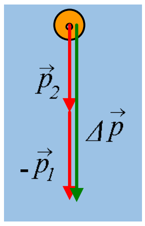
Στο παραπάνω σχήμα, έχει σχεδιαστεί το διάνυσμα της ορμής της σφαίρας στη θέση Α, οπότε για τη μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων Α και Β, έχουμε:

$$\Delta\vec{p}_{1,2}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\vec{p}_2+(-\vec{p}_1)\ \ (1)$$

Έτσι θεωρώντας την αρχική ορμή ως θετική, θα πάρουμε:

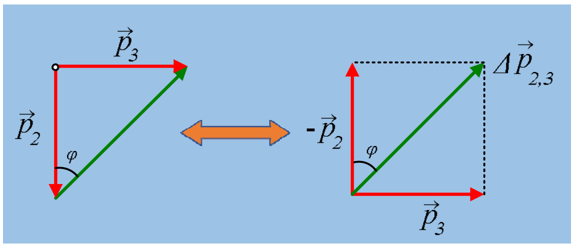
$$\Delta p_{1,2}=p_2-p_1=-1{,}2\ kg\cdot m/s-1{,}2\ kg\cdot m/s=-2{,}4\ kg\cdot m/s$$

Όπου το αρνητικό αποτέλεσμα μας λέει ότι η μεταβολή της ορμής έχει αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική ορμή στη θέση Α.



Εναλλακτικά η εξίσωση (1), μπορεί να διαβαστεί ότι το διάνυσμα $\Delta\vec{p}_{1,2}$ προκύπτει ως το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{p}_2$ *και* $(-\vec{p}_1)$. Αλλά τότε με βάση το διπλανό σχήμα μπορούμε να βρούμε τη μεταβολή της ορμής, με διανυσματικό άθροισμα.

iii) Σχεδιάζουμε τα διανύσματα της ορμής για τις θέσεις Β και Γ, όπως στο (πρώτο) διπλανό σχήμα, οπότε η μεταβολή της ορμής μεταξύ των δύο θέσεων προκύπτει:

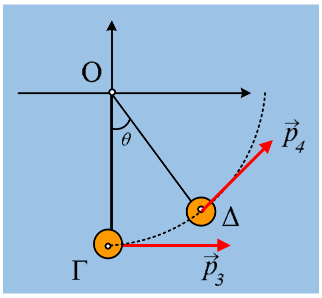


$$\Delta\vec{p}_{2,3}=\vec{p}_3-\vec{p}_2=\vec{p}_3+(-\vec{p}_2)$$

Για το μέτρο της μεταβολής έχουμε:

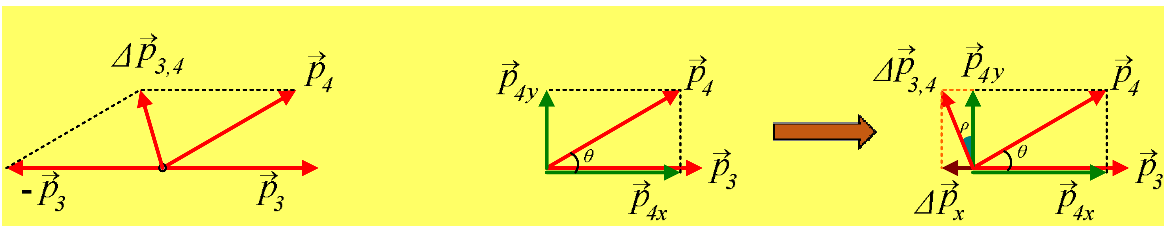
$$\Delta p_{2,3}=\sqrt{p_2^2+p_3^2}=\sqrt{p_2^2+p_2^2}=p_2\sqrt{2}=1{,}2\sqrt{2}kg\cdot m/s$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει γωνία φ=45° με την διεύθυνση y (το παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο).



iv) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι ορμές της σφαίρας στις θέσεις Γ και Δ.

Με την ίδια λογική, μπορούμε να βρούμε τη μεταβολή της ορμής μεταξύ των θέσεων Β και Γ, όπως στο πρώτο σχήμα.



Ας δοκιμάσουμε όμως να δουλέψουμε με άξονες, ελπίζοντας να φανεί η αξία της μεθόδου…

$$\Delta\vec{p}_{3,4}=\vec{p}_4-\vec{p}_3\ \begin{cases}\Delta p_{3,4x}=p_{4x}-p_3\rightarrow\ \Delta p_{3,4x}=p_4\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-p_3=p_3(\sigma\upsilon\nu\theta-1)\\[2ex] \Delta p_{3,4y}=p_{4y}-0\rightarrow\ \Delta p_{3,4y}=p_4\cdot\eta\mu\theta\end{cases}$$

Και με αντικατάσταση:

$\Delta p_{3,4x}=p_3\cdot(\sigma\upsilon\theta-1)=1,2(0,8-1)kg\cdot m/s=-0,24\ kg\cdot m/s$ *και*

$\Delta p_{3,4y}=p_4\cdot\eta\mu\theta=1,2\cdot 0,6\ kg\cdot m/s=0,72\ kg\cdot m/s$

Τα αντίστοιχα διανύσματα φαίνονται στο τελευταίο από τα παραπάνω σχήματα, οπότε για την συνολική μεταβολή παίρνουμε:

$$\Delta p_{3,4}=\sqrt{\Delta p_{3,4x}^2+\Delta p_{3,4y}^2}=\sqrt{0,24^2+0,72^2}kg\cdot m/s\approx 0,76kg\cdot m/s$$

Ενώ για την κατεύθυνση του διανύσματος μεταβολής της ορμής:

$$\varepsilon\varphi\rho=\frac{\Delta p_x}{\Delta p_y}=\frac{0,24}{0,72}=\frac{1}{3}$$

dmargaris@gmail.com