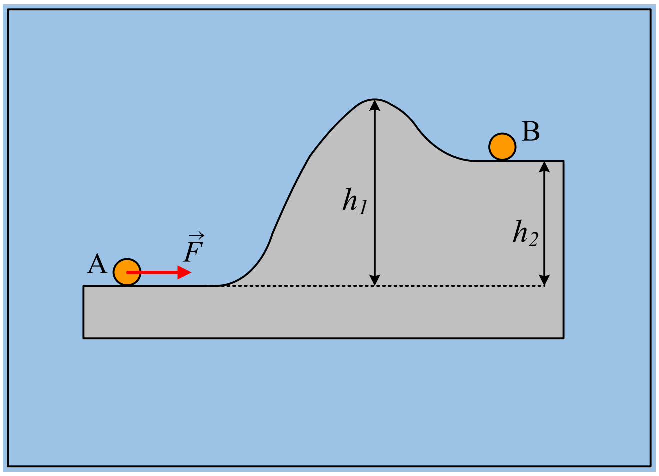
Η μεταφορά από ένα ουράνιο σώμα, σε άλλο.

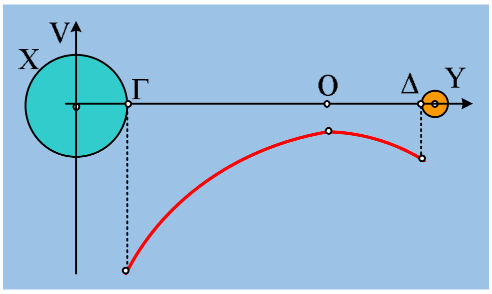
Μια σφαίρα μάζας m=2kg ηρεμεί στη θέση Α και θέλουμε να την μεταφέρουμε στη θέση Β, του διπλανού σχήματος, όταν μεταξύ των δύο σημείων παρεμβάλλεται ένα βουναλάκι ύψους h_1=20m, ενώ η κατακόρυφη απόσταση των δύο σημείων είναι h_2=15m. Τριβές δεν υπάρχουν.



i) Η μεταφορά μπορεί να γίνει με την επίδραση μιας μεταβλητής δύναμης F. Να υπολογιστεί το ελάχιστο έργο της δύναμης F, για την μεταφορά αυτή. Πόσο αυξήθηκε η μηχανική ενέργεια της σφαίρας κατά την παραπάνω μεταφορά;

ii) Εναλλακτικά μπορούμε να εκτοξεύσουμε τη σφαίρα, προσδίδοντάς της κατάλληλη αρχική ταχύτητα, η οποία θα της επιτρέψει να φτάσει στη θέση Β. Να υπολογιστεί η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης, καθώς και η αύξηση της μηχανικής ενέργειας της σφαίρας, στην περίπτωση αυτή.

iii) Ας θεωρήσουμε δύο ουράνια σώματα (δύο πλανήτες τους οποίους για τις ανάγκες του προβλήματος ας τους θεωρήσουμε ακίνητους) και μας ενδιαφέρει η μεταφορά ενός σώματος Σ μάζας m=2kg, από το σημείο Γ στην επιφάνεια του Χ, στο σημείο Δ, στην επιφάνεια του σώματος Υ. Στο διάγραμμα δίνεται ένα ποιοτικό διάγραμμα του δυναμικού του σύνθετου βαρυτικού πεδίου των δύο πλανητών, όπου οι τιμές των δυναμικών των σημείων Γ, Ο (το σημείο με το μέγιστο δυναμικό) και Δ: $V_Γ$= - 6·10^7 J/kg, V_O= - 1·10^7 J/kg και $V_Δ$= - 2·10^7 kg.



α) Ποια η ελάχιστη αρχική κινητική ενέργεια, που πρέπει να προσδώσουμε στο σώμα Σ για την μεταφορά του από τον πλανήτη Χ στον πλανήτη Υ;

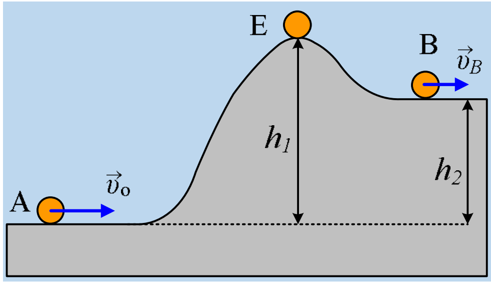
β) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του σώματος Σ τη στιγμή που φτάνει στον πλανήτη Υ.

Απάντηση:

i) Το ελάχιστο έργο της δύναμης, είναι αυτό που θα μεταφέρει το σώμα στη θέση Β με μηδενική τελική ταχύτητα. Αλλά τότε το έργο αυτό θα είναι ίσο και με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας του σώματος μεταξύ των θέσεων Α και Β:

$$W_{min}= U_B-U_A= mgh_2=2\cdot 10\cdot 15J=300J.$$

ii) Στον παραπάνω υπολογισμό, δεν μας ενδιέφερε η διαδρομή που θα ακολουθήσουμε για να πάμε από το Α στο Β, αφού αυτό που πραγματικά παίζει ρόλο, είναι το έργο του βάρους (W_w=-ΔU).



Όμως στην περίπτωση που εκτοξεύσουμε το σώμα με κάποια αρχική ταχύτητα στη θέση Α, το σώμα πρέπει να μπορέσει να φτάσει στην κορυφή του λοφίσκου, θέση Ε, και από εκεί και μετά να «κατρακυλήσει» προς το σημείο Β. Η ελάχιστη λοιπόν αρχική ταχύτητα που πρέπει να αποκτήσει στη θέση Α, είναι αυτή που θα του επιτρέψει να φτάσει στην κορυφή Ε με σχεδόν μηδενική ταχύτητα, αφού στη συνέχεια θα κινηθεί επιταχυνόμενα και θα φτάσει στο Β με κάποια ταχύτητα μέτρου υ_B.

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη θέση Α, μέχρι την θέση Ε παίρνουμε, θεωρώντας μηδενική την αρχική δυναμική ενέργεια:

$$K_A+U_A=K_E+U_E \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + 0 = 0 + mgh_1 \rightarrow$$

$$\upsilon_o = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 20}m/s = 20m/s$$

Προφανώς η αύξηση της μηχανικής ενέργειας στην περίπτωση αυτή ίση με την αρχική κινητική ενέργεια στη θέση Α είναι ίση:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}2\cdot 20^2 J = 400J$$

Σημείωση: Αν εφαρμόσει κάποιος την ΑΔΜΕ από το Ε στο Β θα βρει ότι η σφαίρα φτάνει στο Β με ταχύτητα:

$$\upsilon_B = \sqrt{2g(h_1-h_2)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5}m/s = 10m/s$$

Και η αύξηση της μηχανικής ενέργειας θα μπορούσε να υπολογιστεί από την εξίσωση:

$$\Delta E= \Delta U+K_B= mgh_2+ \tfrac{1}{2} m\upsilon_B^2=300J+ \tfrac{1}{2}\, 2\cdot 10^2 J=400J.$$

iii) Με βάση το διάγραμμα του δυναμικού που μας δίνεται, καθώς το σώμα Σ εκτοξεύεται από το σημείο Γ του πλανήτη Χ και αρχίζει να ανεβαίνει η δυναμική του ενέργεια (U=m·V) αυξάνεται, αλλά τότε μειώνεται η κινητική του ενέργεια. Συνεπώς με βάση και τη λογική που εφαρμόσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, αρκεί το σώμα να μπορέσει να φτάσει στο σημείο με τη μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια (το σημείο Ο που έχει και το μεγαλύτερο δυναμικό), αφού στη συνέχεια θα κινηθεί και θα φτάσει στην επιφάνεια του πλανήτη Υ.

α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από το Γ στο Ο και παίρνουμε:

$$K_\Gamma+U_\Gamma=K_O+U_O \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + mV_\Gamma = 0 + mV_O \rightarrow$$

$$\upsilon_o = \sqrt{2(V_O - V_\Gamma)} = \frac{\sqrt{2(-1\cdot 10^7 + 6\cdot 10^7)}m}{s} = \frac{\sqrt{2\cdot 5\cdot 10^7}m}{s} = 10km/s$$

β) Εφαρμόζουμε ξανά την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από το Ο στο Β και παίρνουμε:

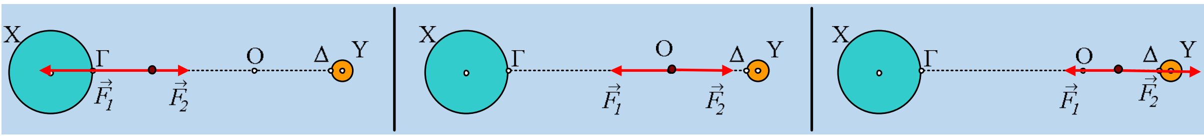
$$K_O+U_O=K_B+U_B \rightarrow$$

$$0 + mV_O = \frac{1}{2}mv_B^2 + mV_B \rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2(V_O - V_B)} = \sqrt{2(-1 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^7)}m/s \approx 4{,}5km/s$$

Σχόλια.

1. Μπορείτε στη θέση του πλανήτη Χ να βάλετε τη Γη και στη θέση του Υ τη Σελήνη. Ένα σώμα για να πάει από τη Γη στη Σελήνη, αρκεί να φτάσει σε ένα σημείο Ο, το οποίο έχει τη μέγιστη δυναμική ενέργεια, αφού στη συνέχεια μπορεί να κινηθεί επιταχυνόμενα προς την επιφάνεια της Σελήνης. Στην παρούσα άσκηση, απλά «πειράξαμε» λίγο τα αριθμητικά δεδομένα, για ευκολία στις πράξεις, μιλώντας για δύο ουράνια σώματα…
2. Με όρους «δύναμης», το σώμα Σ μέχρι να φτάσει στο σημείο Ο, δέχεται δύο δυνάμεις από τα ουράνια σώματα, με συνισταμένη που κατευθύνεται προς τον πλανήτη Χ, εκτελώντας επιβραδυνόμενη κίνηση. Το σημείο Ο, δεν είναι άλλο, παρά η θέση εκείνη για την οποία ΣF=0, αφού στη συνέχεια η συνισταμένη κατευθύνεται προς τον Υ, επιταχύνοντας το σώμα.



3. Βέβαια ένα ταξίδι από τη Γη στη Σελήνη, δεν θα γίνει με «όρους Ιουλίου Βερν» και με εκτόξευση, όπως παραπάνω. Όλοι έχουμε δει τον πύραυλο που επιταχύνει το διαστημόπλοιο για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, ενώ στη συνέχεια αυτό, με «σβηστές μηχανές» συνεχίζει το ταξίδι του. Έτσι δεν υπάρχει αρχική ταχύτητα, υπάρχει όμως έργο που παράγεται πάνω στο διαστημόπλοιο, για ορισμένο διάστημα, οπότε αποκτά κινητική ενέργεια, έστω και αν αυτή δεν είναι αρχική…

dmargaris@gmail.com